

新编电气与电子信息本科规划教材·电子电气基础课程

# 信号与系统

杨忠根 任 蕾 陈红亮 编著

電子工業出版社·

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书介绍信号和系统的基本概念,以及信号通过线性时不变系统的分析方法,涉及连续时间信号与系统的时域分析、频域分析和  $s$  域分析方法,离散时间信号与系统的时域分析、频域分析和  $z$  域分析方法,连续时间及离散时间信号与系统的状态变量分析,以及 MATLAB 在信号与系统中的应用。本书配有免费电子课件。

本书根据教学大纲的要求精选教学内容,突出基本理论、概念和技能的介绍,加强了各章内容之间的联系和衔接,通过对典型例题的各种分析方法的求解过程的介绍和比较,加深对所学知识的理解和比较。同时,在许多章节都提出了一些新的理论、概念或方法。

本书可作为高等院校电气信息类各专业“信号与系统”课程教材,也可供有关科技人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

信号与系统/杨忠根,任蕾,陈红亮编著. —北京:电子工业出版社,2009.7

新编电气与电子信息类本科规划教材·电子电气基础课程

ISBN 978-7-121-09004-2

I. 信… II. ①杨…②任…③陈… III. 信号系统—高等学校—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 091796 号

策划编辑:韩同平

责任编辑:段丹辉

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:440 千字

印 次:2009 年 7 月第 1 次印刷

印 数:4000 册 定价:29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 [zlt@phei.com.cn](mailto:zlt@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线:(010)88258888。

# 前 言

信号与系统是电子信息类专业最基本的专业课程之一,该课程是数字信号处理、通信原理等相关课程的基础,其理论和分析方法在很多领域中得到了广泛的应用。

本书介绍信号和系统的基本概念,以及信号通过线性时不变系统的分析方法,涉及连续时间信号与系统的时域分析、频域分析和  $s$  域分析方法,离散时间信号与系统的时域分析、频域分析和  $z$  域分析方法,连续时间及离散时间信号与系统的状态变量分析,以及 MATLAB 在信号与系统中的应用。

信号与系统分析理论在过去的几十年中发展迅速,新理论和方法不断出现,已经渗透到社会生活的各个方面,本书作者在总结多年教学实践的基础上,对本课程的教学内容进行了重新编排和整合。

本书遵循“精讲多练”的原则,对课程内容进行了精心安排,教学内容系统全面,概念叙述清楚,突出了重点知识中的基本理论、基本概念、基本技能的介绍,为此不仅充实了与教学重点相关的内容,而且经典内容的表述上也独具特色。各章的特色如下。

第 1 章介绍了阶跃信号的尺度特性、截取特性和示性特性,冲激信号的赋值特性、筛选特性、尺度特性和检零特性,并列表总结了常见运算和常见系统的特性。

第 2 章提出了因果微分定理,并提出了系统时域分析的等效激励法,给出了零输入响应的两个定义,理论上严格证明了它们的等价性,并用实例验证此等效性;用等效激励概念推导了计算状态跳变的简便计算公式,给出了冲激匹配法的实质;总结并给出了不同情况下的时域分析的优选方法;明确指出了卷积计算的解析法、图解法和性质法的适用范围。

第 3 章在介绍傅里叶变换及其性质后,把傅里叶级数作为其应用特例;在给出非因果信号傅里叶变换的时域微分性质的同时,给出了因果信号傅里叶变换的时域微分性质,并给出了用频域法求解已知初始状态和因果激励时的系统微分方程的技术;给出了计算正弦信号、周期信号、因果正弦信号、因果周期信号通过 LTI 系统时的系统稳态响应和暂态响应的计算公式;讨论了几个常见的希尔伯特关系。

第 4 章从因果微分定理和拉普拉斯变换定义出发,推导了拉普拉斯变换中的时域微分性质、时域积分性质、初值定理和终值定理;把以等效激励法为核心的系统时域分析和  $s$  域分析进行了全面的列表比较;介绍了系统的信号流图表示,指出了信号流图表示实际上是系统方框图表示的简化,并用典型元器件、典型系统例示了信号流图表示,为系统的状态变量分析打下基础;讨论了全通滤波器的负连续相位函数特性、最小相位系统的最小连续相位滞后特性和复倒谱的因果稳定性。

第 5 章对离散时间信号与系统理论进行了内容精选,注意避免与《数字信号处理》教材内容的不必要的重复;叙述了因果移序性质的时域表示式和  $z$  域表示式,并由此导出离散系统时域分析中的等效激励法和离散系统的  $z$  域分析;在  $z$  逆变换的部分分式分解中同时推荐了两种系数求解方法;讨论了几种重要的数字滤波器的特性。

第 6 章把因果微分定理或因果移序性质和等效激励法进行时域分析的技术推广应用于连续系统或离散系统的状态方程求解上,指明了矢量系统的冲激响应的物理意义,表明了状态

转移矩阵就是规范化状态方程的冲激响应，给出了状态方程的冲激响应、系统冲激响应、状态矢量和输出矢量的时域解公式。把它们与  $s$  域求解公式或  $z$  域求解公式相对应。

第 7 章通过引入 MATLAB 的系统分析工具，详细介绍与信号分析和系统分析有关的 MATLAB 函数，通过大量实例，帮助读者在 MATLAB 实验中深入学习和理解有关知识，可作为课程实验的内容进行安排。

本书对经典问题给出了多种解法，以丰富的例题帮助读者理解和消化所学知识，加强了各章内容的紧密联系、合理衔接，突出了概念的物理意义解释，精心安排叙述内容和次序，条理清晰，便于教师组织教学，也便于读者自学。

每章包括本章学习要点和本章小结，可方便读者把握学习的重点和难点；为配合教学，本书各章都安排有精选的习题，可以适当选用。考虑到不同专业、不同层次的教学需求，本书中带星号(\*)的节或小节，可作为选学内容。

本书的第 2, 3, 4 章和第 6 章的连续系统部分由杨忠根编写，第 1, 5 章和第 6 章的离散系统部分及各章习题由任蕾编写，第 7 章由陈红亮编写。

本书得到了上海高校信息工程(港口航运)教育高地建设项目和上海海事大学《信号与系统(本科)优秀教学团队》建设项目的资助。东南大学吴镇扬教授对全书进行了认真的审阅。茅微岑硕士绘制了第 1~6 章的正文和习题中的所有附图，在此表示衷心的感谢！

本书的推荐总学时为 72 学时，其中授课学时为 64 学时，实验学时为 8 学时。

由于作者能力有限，书中难免有不妥之处，恳请各位读者指正。

编著者  
于上海海事大学

# 目 录

第 1 章 概论	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 信号的基本概念	(2)
1.3 信号的运算	(4)
1.4 典型信号	(6)
1.5 信号的分解	(13)
1.6 系统的基本概念	(14)
1.7 系统分析方法	(18)
本章小结	(19)
习题	(19)
第 2 章 连续时间系统的时域分析	(23)
2.1 系统的微分方程描述及其响应	(23)
2.2 冲激响应的计算	(32)
2.3 卷积性质和计算	(37)
2.3.1 卷积计算的解析法	(37)
2.3.2 卷积计算的图解法	(38)
2.3.3 卷积的性质	(40)
2.3.4 卷积计算的性质法	(43)
2.4 应用于时域分析的卷积技术	(44)
2.4.1 应用于非因果信号激励时的时域分析的卷积法	(44)
2.4.2 基于因果微分定理的系统时域分析卷积法	(45)
2.4.3 基于因果微分定理从 $0_-$ 时刻初始条件计算 $0_+$ 时刻初始条件	(49)
2.4.4 已知 $0_+$ 时刻初始条件时的系统时域分析卷积法	(50)
2.4.5 零输入响应的两种定义的等效性*	(51)
本章小结	(53)
习题	(54)
第 3 章 连续时间信号与系统的频域分析	(60)
3.1 非周期信号的频域分析——傅里叶变换	(60)
3.1.1 非周期信号的傅里叶变换	(60)
3.1.2 傅里叶变换的物理意义——连续谱	(61)
3.2 典型非周期信号的傅里叶变换和傅里叶变换的性质	(61)
3.2.1 典型非周期信号的傅里叶变换	(61)
3.2.2 傅里叶变换性质	(63)

3.3	周期信号的频域分析——傅里叶级数	(75)
3.3.1	周期信号的傅里叶级数分析	(75)
3.3.2	周期信号傅里叶变换的物理意义——离散谱	(75)
3.3.3	典型周期信号的 FS 分析	(77)
3.3.4	对称性与 FS 系数的关系	(81)
3.4	采样信号的傅里叶变换	(82)
3.4.1	时域采样信号的傅里叶变换(傅里叶变换的时域采样性质——时域采样与频域周期叠加)	(82)
3.4.2	带限信号的时域采样定理——奈奎斯特(Nyquist)采样定理	(82)
3.4.3	矩形脉冲采样*	(84)
3.4.4	频域采样信号的傅里叶逆变换(傅里叶变换的频域采样性质)*	(85)
3.4.5	时限信号的频域采样定理*	(86)
3.5	LTI 系统的频域分析	(87)
3.5.1	系统传递函数	(87)
3.5.2	系统功能分析	(89)
3.5.3	LTI 电路和系统的频域特性分析	(91)
3.5.4	用于计算卷积的傅里叶变换法	(100)
3.5.5	无失真传输和理想低通滤波器	(101)
3.6	系统因果性与希尔伯特特性的对应关系	(105)
3.6.1	系统因果性的必要条件——佩利-维纳准则	(105)
3.6.2	时域因果性与频域希尔伯特特性的对应关系	(106)
3.6.3	最小相位系统的希尔伯特关系*	(106)
3.6.4	解析信号的时域希尔伯特关系*	(107)
3.6.5	希尔伯特滤波器*	(107)
	本章小结	(108)
	习题	(108)
第 4 章	连续时间信号与系统的 s 域分析	(113)
4.1	拉普拉斯变换概述	(113)
4.1.1	拉普拉斯变换的定义	(113)
4.1.2	典型信号的拉普拉斯变换	(114)
4.2	拉普拉斯变换的性质	(115)
4.2.1	线性	(115)
4.2.2	时延定理	(115)
4.2.3	复频移定理	(115)
4.2.4	尺度(Scaling)定理	(116)
4.2.5	时域微分性质	(117)
4.2.6	时域积分性质	(117)
4.2.7	卷积定理	(118)
4.2.8	复频域微分性质	(119)

4.2.9	复频域卷积定理	(120)
4.2.10	初值定理	(120)
4.2.11	终值定理	(120)
4.3	拉普拉斯逆变换	(122)
4.3.1	单极点情况	(122)
4.3.2	重极点情况	(123)
4.3.3	分母有负指数项情况	(124)
4.4	LTI 系统和线性电路的 $s$ 域分析	(125)
4.4.1	LTI 系统的 $s$ 域分析	(125)
4.4.2	线性电路的 $s$ 域分析	(128)
4.4.3	用于计算卷积的拉氏变换法	(134)
4.4.4	系统稳定性	(136)
4.4.5	系统的方框图表示	(140)
4.4.6	系统的流程图表示	(141)
4.4.7	系统实现	(142)
4.5	全通网络和最小相位网络的零、极点分布 <sup>*</sup>	(145)
4.5.1	全通网络	(145)
4.5.2	最小相位系统	(147)
4.6	拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系	(148)
4.6.1	双边拉普拉斯变换	(148)
4.6.2	拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系	(149)
	本章小结	(151)
	习题	(152)
第 5 章	离散时间信号与系统分析	(160)
5.1	离散时间信号	(160)
5.1.1	离散时间信号的定义	(160)
5.1.2	典型离散时间信号	(160)
5.1.3	离散时间信号的典型运算	(162)
5.2	离散时间系统	(163)
5.2.1	差分方程	(163)
5.2.2	LTI 离散系统的响应	(165)
5.3	$z$ 变换	(168)
5.3.1	$z$ 变换的定义	(168)
5.3.2	$z$ 变换的收敛域	(169)
5.3.3	典型序列的 $z$ 变换	(170)
5.3.4	$z$ 变换的性质	(170)
5.4	$z$ 逆变换	(174)
5.4.1	长除法	(175)
5.4.2	部分分式展开法	(175)

5.5	离散系统的 $z$ 域分析 .....	(177)
5.5.1	用 $z$ 变换计算离散系统的零输入响应、零状态响应和全响应 .....	(177)
5.5.2	LTI 离散系统的系统函数 $H(z)$ .....	(178)
5.5.3	零、极点分布和系统稳定性 .....	(179)
5.5.4	离散系统的 $z$ 域模拟 .....	(181)
5.6	离散信号的频域分析 .....	(183)
5.6.1	离散信号傅里叶变换的定义 .....	(183)
5.6.2	周期离散信号的傅里叶变换——离散傅里叶变换 (DFT) .....	(184)
5.6.3	离散信号傅里叶变换和 DFT 的性质 .....	(185)
5.7	离散系统的频域分析与数字滤波器 .....	(185)
5.7.1	LTI 离散系统的频率特性 .....	(185)
5.7.2	正弦序列通过 LTI 离散系统 .....	(185)
5.7.3	数字滤波器 .....	(187)
	本章小结 .....	(191)
	习题 .....	(191)
第 6 章	系统的状态变量分析 .....	(197)
6.1	引言 .....	(197)
6.1.1	经典系统分析方法的局限性 .....	(197)
6.1.2	状态变量分析理论的重要意义 .....	(197)
6.1.3	基本概念 .....	(197)
6.1.4	状态变量分析方法的优点 .....	(198)
6.2	连续时间系统状态方程的建立 .....	(199)
6.2.1	状态方程的一般形式 .....	(199)
6.2.2	由电路图直接建立状态方程 .....	(200)
6.2.3	由信号流图建立状态方程 .....	(201)
6.3	连续时间系统状态方程的求解 .....	(204)
6.3.1	时域法——矢量微分方程求解 .....	(204)
6.3.2	状态方程求解的 $s$ 域法 .....	(207)
6.3.3	状态方程求解例示 .....	(208)
6.4	离散时间系统状态方程的建立 .....	(210)
6.4.1	离散时间系统状态方程的一般形式 .....	(210)
6.4.2	由系统输入-输出方程(或系统函数)或实现框图(或信号流图)建立状态方程 .....	(211)
6.5	离散时间系统状态方程的求解 .....	(215)
6.5.1	时域法——矢量差分方程求解 .....	(215)
6.5.2	状态方程求解的 $z$ 变换法 .....	(218)
6.5.3	例示 .....	(218)
6.6	系统解耦——状态变量的线性变换和 $\mathbf{A}$ 矩阵的对角化 .....	(220)
6.6.1	状态变量的线性变换 .....	(220)
6.6.2	系统解耦—— $\mathbf{A}$ 矩阵的对角化 .....	(221)



6.6.3 由  $A$  矩阵的特征值判断系统稳定性..... (224)

本章小结..... (224)

习题..... (225)

第 7 章 MATLAB 在信号与系统中的应用..... (230)

7.1 MATLAB 简介..... (230)

7.1.1 MATLAB 的工作方式..... (230)

7.1.2 获取帮助..... (231)

7.1.3 表达式——变量..... (231)

7.1.4 表达式——运算符..... (231)

7.1.5 函数文件..... (232)

7.1.6 For 循环..... (233)

7.1.7 While 循环..... (233)

7.1.8 plot 函数——绘图函数..... (233)

7.1.9 stem 函数——绘图函数..... (234)

7.2 信号的 MATLAB 表示..... (235)

7.2.1 基本信号的 MATLAB 表示..... (235)

7.2.2 信号基本运算的 MATLAB 实现..... (237)

7.3 利用 MATLAB 进行系统的时域分析..... (240)

7.4 利用 MATLAB 进行信号的频域分析..... (245)

7.4.1 周期信号频谱的 MATLAB 实现..... (245)

7.4.2 利用 FFT 和 IFFT 分析与合成离散非周期信号..... (246)

7.5 利用 MATLAB 进行系统频域分析..... (247)

7.5.1 连续系统频率响应特性的计算..... (247)

7.5.2 周期信号通过系统的响应..... (248)

7.5.3 离散系统频率响应特性的计算..... (249)

7.6 利用 MATLAB 进行连续系统的  $s$  域分析..... (250)

7.6.1 部分分式展开的 MATLAB 实现..... (250)

7.6.2  $H(s)$  的零、极点与系统特性的 MATLAB 计算..... (251)

7.7 利用 MATLAB 进行离散系统的  $z$  域分析..... (253)

7.7.1 部分分式展开的 MATLAB 实现..... (253)

7.7.2  $H(z)$  的零、极点与系统特性的 MATLAB 计算..... (253)

参考文献..... (256)

# 第1章 概 论

## 学习要点

本章概述信号与系统的基本概念。读者学习本章要注意理解以下重要内容:

1. 信号与系统课程的重要性;
2. 信号的概念、分类与运算;
3. 系统的概念、分类与联接形式;
4. 系统的线性特性、时不变性、因果性和稳定性的定义与判断。

## 1.1 引 言

信号与系统是在电工原理的基础上发展起来的,并随着电子工程、通信工程、计算机和信息技术的飞速发展而不断地发展与完善。在信号与系统学科的发展中,微分方程和差分方程理论,傅里叶(Fourier)变换、拉普拉斯(Laplace)变换、离散傅里叶变换和 $z$ 变换等正交变换理论起着十分重要的作用。1948年创立的系统论、信息论与控制论极大地推动了信号与系统学科的发展。

高等数学,尤其是微积分和微分方程理论,复变函数和积分变换理论,电路基础是学好本课程的基础。

本课程是学好电子工程、通信工程 and 信息技术等专业课程的理论基础。

本书共分7章,各章内容如下所述。

第1章概述信号与系统,主要讨论信号的概念、分类与运算;系统的概念、分类与联接形式;系统的线性特性、时不变性、因果性和稳定性的定义与判断。

第2章讨论连续时间系统的时域分析。主要讨论线性时不变系统的微分方程描述,系统零输入响应、零状态响应、全响应、冲激响应和阶跃响应的分析和计算,以及卷积的概念与计算。

第3章讨论连续时间信号与系统的频域分析。重点讨论非周期连续信号的傅里叶变换、周期连续信号的傅里叶级数分析、系统频域分析、采样定理和调制定理的含义与应用。

第4章讨论连续时间信号与系统的 $s$ 域分析。重点讨论拉普拉斯变换、拉普拉斯逆变换、电路和用微分方程描述的线性时不变系统的 $s$ 域分析、系统函数、零极点分布对系统响应和系统稳定性的影响,以及拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系。

第5章简要讨论离散时间信号与系统。重点介绍离散时间信号、描述离散系统的差分方程、差分方程的时域求解、离散卷积和的计算、 $z$ 变换、 $z$ 逆变换、离散信号的周期频谱、离散系统的模拟、频域分析、 $z$ 域分析和稳定性分析。

第6章讨论连续系统和离散系统的状态变量分析。主要讨论系统状态方程的建立、系统状态方程的时域法和变域法求解、线性变换对状态变量分析的影响。

第7章介绍 MATLAB 及其在信号与系统分析中的应用。主要包括 MATLAB 简介、信号的 MATLAB 表示、利用 MATLAB 进行信号与系统的时域分析、频域分析以及 $s$ 域分析和 $z$ 域分析。

1.2 信号的基本概念

一切事物都处于不断的运动变化中。广义地说，物质的一切运动或状态变化都是一种信号(Signal)，即**信号是物质运动的表现形式**。例如，机械振动产生力信号、位移信号和噪声信号；雷电过程产生声、光信号；大脑和心脏分别产生脑电和心电信号；通信发射机产生电磁波信号等。在通信系统中，信号是传送消息(Message)的工具。所谓消息，就是用某种方式传递的声音、文字、图像、符号等。例如，电话中传送的话音，电报中传送的报文，传真系统传送的图文，广播电台传送的新闻、音乐，电视系统传送的图像序列，示波器测量的电压波形信号，频谱分析仪显示的频谱特性等。受信者从所传递的消息中提取各种有用信息(Information)。这就是说，**信息内含于信号，信号是信息的载体**。人们真正感兴趣的是内含于信号中的信息。信号分析的目的就是要从信号中提取信息，即从所获得的消息，通过不确定性的减少，获取新知识。

抽象地讲，在数学上信号用函数表示。因此，我们可以把信号与函数等同起来看待。最常见的信号是随时间变化的信号，例如电信号、光信号、声信号、力信号、温度信号等；另一种常见的信号随空间位置变化，如图像信号、电磁场、热场、运动场等。由于电信号易于处理和分析，工程上通常把非电信号转化为电信号，这称之为非电量的电信号模拟。由于电信号的重要性，本书仅研究电信号，并把它简称为信号。

信号的分类有很多种方法，按照分类的标准，大致有如表 1.1 所示的分类。

表 1.1 信 号 分 类

分类标准	确定否	周期否	连续否	量化否	因果否	能量有限否	功率有限否
肯定时	确定性	周期	连续	量化	因果	能量有限	功率有限
否定时	随机性	非周期	离散	未量化	非因果	能量无限	功率无限

1. 确定性信号与随机信号

如果信号的变化规律是确定的，能用确定的数学函数表示，即对任一确定的时间(或空间)，信号有确定的函数值，则称其为确定性信号，如常用的多项式函数、三角函数、指数函数、对数函数等。相反，如果信号的变化规律是随机的，不能用确定的数学函数表示，只能用统计规律来描述其随机特性(包括表示的数学函数中含有随机参数情况)，即对任一确定的时间(或空间)，信号没有确定的函数值，只能用均值、方差等统计量或概率密度函数来描述，则称其为随机信号，如各种噪声、随机正弦函数等。本书仅研究确定性信号。

图 1.1 给出了几种简单信号的波形，其中图 1.1(a)~(e)都是确定性信号，而图 1.1(f)是随机信号。

2. 周期信号与非周期信号

周期信号是按某一固定周期重复出现的信号，它可表示为 $f(t)=f(t+nT)$ ，其中周期  $T$  为常数。对这种信号，只要给出任一周期内的变化规律，即可确定它在所有其他时刻的取值，如图1.1(c)所示。

任何周期信号都可表示为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(t-nT)$$

式中,

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

是仅在基本周期内取非零值的有限长信号, 即  $f(t)$  是  $f_1(t)$  的周期延拓。

常见的非周期信号是有限持续时间 (Finite Duration) 信号, 即仅在一有限时间区间内存在的信号, 如图 1.1 (a), (e) 所示。图 1.1 (b) 是无限持续时间的非周期信号。

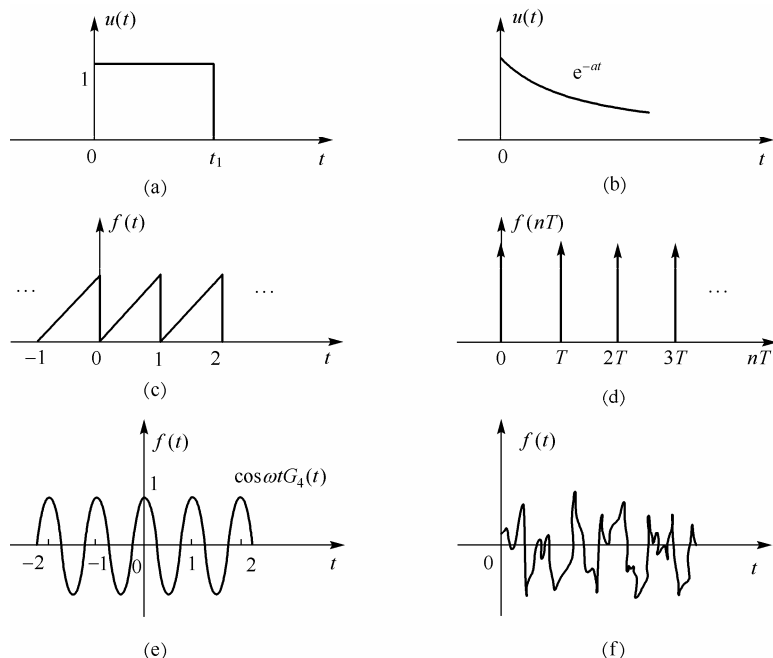


图 1.1 信号分类的例示

### 3. 连续时间信号与离散时间信号

如果信号在一个(可能是无限的)时间区间内的每一时刻都能取值, 即时间  $t$  取实数值, 则称为连续时间信号, 如图 1.1 (a), (b), (c), (e), (f) 所示。反之, 如果信号仅能在一个(可能是无限长的)时间区间内的某些时刻上取值, 即时间  $t = n\Delta$ , 其中  $n$  属于整数,  $\Delta$  为常数, 则称为离散时间信号。

与离散时间信号密切有关的是采样信号

$$f_s(t) = \begin{cases} f(nT) & t = nT, n \text{ 为任意整数} \\ 0 & t \text{ 为其他值} \end{cases}$$

式中,  $T$  为采样间隔。采样信号是仅在采样时刻取信号样本值而在其他时刻取零值的连续时间信号。离散信号是由采样时刻的样本值组成的序列。离散时间信号与采样信号的差别在于: 当  $t \neq nT$  时, 离散信号无定义。然而, 两者有相同的波形图, 如图 1.1 (d) 所示。

### 4. 因果信号与非因果信号

如果信号在小于零的时刻都取零值, 即  $f(t) = 0 (\forall t < 0)$ , 则称为因果信号, 如图 1.1 (a), (b), (d), (f) 所示。反之, 称为非因果信号, 如图 1.1 (c), (e) 所示。要说明的是, 因果信号一定是

非周期信号。但为方便起见,又称图 1.1(d)所示的信号为因果周期信号,在第 4 章中我们要分析这种信号。它的特点是,从接入时刻起,信号呈周期变化,它可看做是把周期信号经过因果化处理后得到的信号。它可表示为  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_1(t-nT)$ 。当然,由于它是因果信号,所以它仍是非周期信号。

同样,如果信号在大于零的时刻都取零值,即  $f(t) = 0 (\forall t > 0)$ , 则称为反因果信号。

## 5. 有界信号与无界信号

如果信号在所有时刻的取值都有界,即  $|f(t)| < +\infty (\forall t \in \mathbb{R})$ , 则称为有界信号,如图 1.1 中所示的所有信号。反之,则称为无界信号,如线性增长信号  $f(t) = t$  和指数增长信号  $f(t) = e^{at}$ , 其中  $a > 0$ 。

如果信号的能量有限,即信号能量  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$ , 则称为能量有限信号。有限持续时间信号一定是能量有限信号。反之,则不然。另外,如果信号的功率有限,即信号平均功率  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)|^2 dt < +\infty$ , 则称为功率有限信号。能量有限信号一定是功率有限信号。反之,则不然。例如,  $f(t) = \sin(t)$  是功率有限信号,却是能量无限信号。

## 1.3 信号的运算

信号运算涉及两方面:一是对时间变量的运算;二是对信号值的运算。

### 1. 信号的平移、翻转和尺度变换

对时间变量的运算通常是线性坐标变换,这包括平移、翻转和尺度变换。例如  $f(t-\tau)$  (其中  $\tau$  为不等于零的常数)是信号  $f(t)$  的平移,当  $\tau > 0$  时右移,称  $f(t-\tau)$  为  $f(t)$  的延迟;当  $\tau < 0$  时左移,称  $f(t-\tau)$  为  $f(t)$  的超前。它们的波形分别如图 1.2(a) 和 (b) 所示。 $f(-t)$  是信号  $f(t)$  的翻转,它把信号  $f(t)$  的波形绕纵轴旋转  $180^\circ$ ,如图 1.2(c) 所示。 $f(at)$  (其中常数  $a > 0$ ) 是信号  $f(t)$  的尺度变换,当  $a > 1$  时,称  $f(at)$  为波形  $f(t)$  的压缩;当  $a < 1$  时,称  $f(at)$  为波形  $f(t)$  的扩展。它们的波形分别如图 1.2(d) 和 (e) 所示。

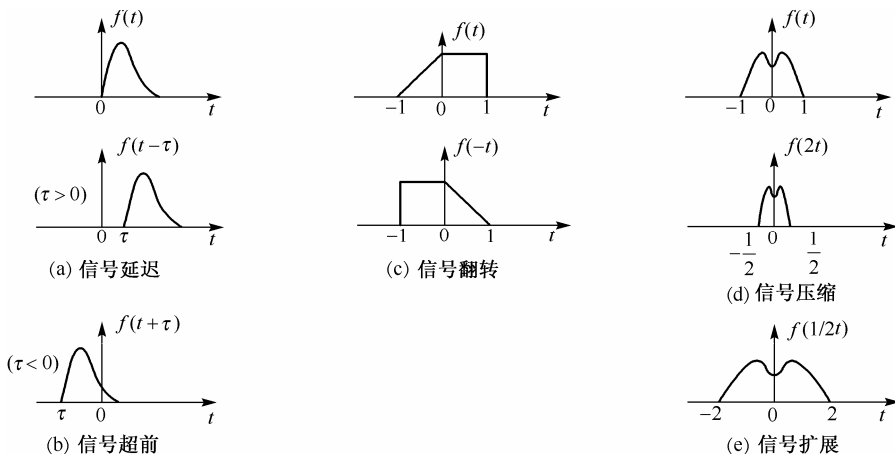


图 1.2 信号的坐标变换

更一般的坐标变换是  $f(at-b)$ ，其中  $a$  和  $b$  为实常数，它是信号  $f(t)$  向右平移  $b$  个单位，再扩展  $|a|$  倍(为了便于说明，以后均称为扩展)，如果  $a < 0$ ，则还需要翻转。此过程也可以看成是首先把信号  $f(t)$  扩展  $a$  倍，然后向右平移  $b/a$  个单位，来得到  $f(at-b)$ 。例1.1说明了此运算过程。

**例 1.1** 已知信号  $f(t)$  的波形如图1.3(a)所示，试画出  $f(-3t-2)$  的波形。

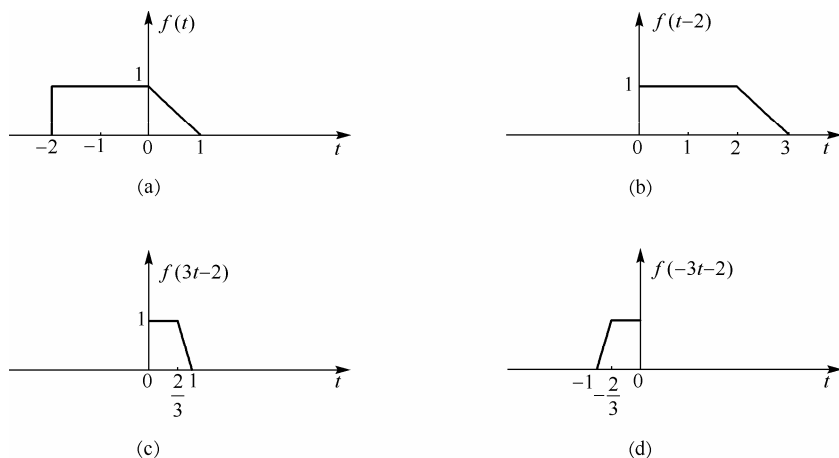


图 1.3 例 1.1 的图示

**解** 首先把信号  $f(t)$  的波形右移 2 个单位，得到  $f(t-2)$  的波形，如图1.3(b)所示；然后把信号  $f(t-2)$  的波形压缩  $1/3$ ，得到  $f(3t-2)$  的波形，如图 1.3(c)所示；最后把  $f(3t-2)$  的波形翻转，得到  $f(-3t-2)$  的波形，如图 1.3(d)所示。

此外，也可以先把信号  $f(t)$  的波形压缩  $1/3$ ，得到  $f(3t)$  的波形；然后把  $f(3t)$  的波形翻转，得到  $f(-3t)$  的波形；最后把  $f(-3t)$  的波形左移  $2/3$  个单位，得到  $f(-3t-2)$  的波形。请读者验证之。

## 2. 信号值的运算

对信号值的运算可分为一元运算和多元运算、即时运算和非即时运算、线性运算和非线性运算。

一元运算是针对单输入信号进行的运算，如信号的微分和积分、信号与常数的乘或加等。图1.4 示出了信号微分的运算结果，图1.5 示出了信号积分的运算结果。多元运算是针对多个输入信号进行的运算，例如两信号的加权和  $y(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$  (其中  $\alpha, \beta$  为常数)、两信号的相乘  $y(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ 。

单信号的即时运算完成该信号的映射，使运算结果仅取决于即时的输入信号值，通常可用信号的输入-输出转移特性表示。若该特性是线性的，则是线性映射，如  $y(t) = kf(t) + b$ ，其中  $k \neq 0$ ， $b$  为常数；否则是非线性映射，如  $y(t) = |f(t)|$  等。图1.6 示出了取绝对值的非线性映射对  $f(t) = \sin(t)$  运算的结果。单个信号的非即时运算使运算结果取决于一段时间区间的输入信号值，一般它要由进行此运算的系统特性如微分方程来描述。多个信号的非即时运算

要由进行此运算的多变量系统特性如微分方程组来描述。

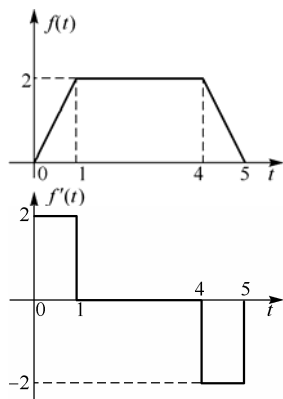


图 1.4 信号微分

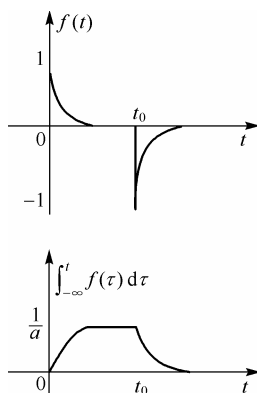


图 1.5 信号积分

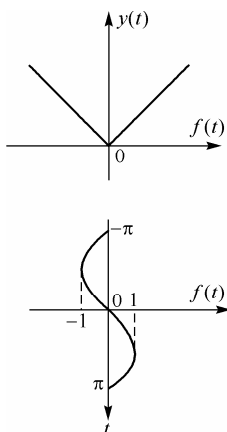


图 1.6 信号取绝对值

## 1.4 典型信号

下面介绍一些常见的典型信号，它们是指数信号、正弦信号、复指数信号、抽样信号、冲激信号和阶跃信号。

### 1. 指数信号

指数信号的表示式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (1.1)$$

式中， $K$ ， $a$ 是实数。若 $a > 0$ ，信号为指数增长函数；若 $a = 0$ ，信号是直流信号，其值恒等于常量 $K$ ；若 $a < 0$ ，信号为指数衰减函数。图1.7示出了三种情况下的指数信号。指数信号的一个重要特点是它对时间的微分或积分仍然是指数信号。

实际上，经常遇到的是如图 1.8 所示的因果指数衰减信号，其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

式中, 时间常数  $\tau > 0$ 。因为  $f(\tau) = 1/e = 0.368$ , 所以经时间  $\tau$  后, 信号衰减为初值的 36.8%。

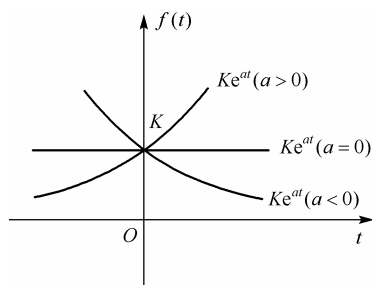


图 1.7 指数信号

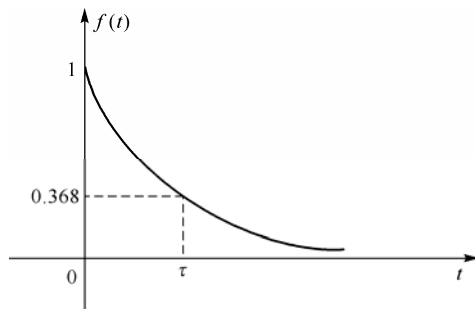


图 1.8 因果指数衰减信号

## 2. 正弦信号

正弦信号和余弦信号仅在相位上相差  $\pi/2$ , 我们统称它们为正弦信号。正弦信号一般可表示为

$$f(t) = K \sin(\omega t + \phi) \quad (1.3)$$

式中,  $K$  为振幅;  $\omega$  是角频率;  $\phi$  称为初始相位。式(1.3)所示正弦信号的周期  $T = 2\pi/\omega = 1/f$ , 其中  $f$  是频率。其波形如图1.9所示。

在信号与系统分析中, 有时遇到波形如图1.10所示的因果指数衰减的正弦信号, 其正弦振荡的幅度即包络按指数规律衰减, 其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ke^{-t/\tau} \sin(\omega t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

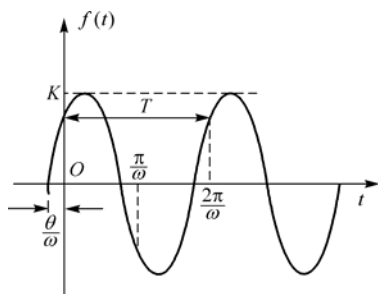


图 1.9 正弦信号

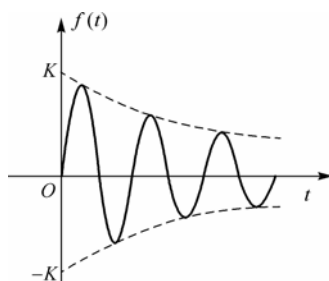


图 1.10 因果指数衰减正弦信号

正弦信号常借助复指数信号来表示, 由欧拉公式

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{cases} \quad (1.5)$$

可知

$$\begin{cases} \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \\ \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \end{cases} \quad (1.6)$$



这是以后经常要用到的两对关系式。

与指数信号相似, 正弦信号对时间的微分或积分仍是正弦信号。

### 3. 复指数信号

复指数信号是指数因子为复数的指数信号, 其表示式为

$$f(t) = Ke^{st}, \quad s = \sigma + j\omega \quad (1.7)$$

式中,  $\sigma$  是复频率  $s$  的实部;  $\omega$  是  $s$  的虚部。式 (1.7) 用欧拉公式展开后, 得

$$f(t) = Ke^{(\sigma + j\omega)t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (1.8)$$

这表明, 一个复指数信号可分解为虚、实两个相位差等于  $\pi/2$  的指数衰减正弦信号分量。指数因子的实部  $\sigma$  表征了正弦振荡幅度的指数变化情况,  $\sigma > 0$  时指数增长,  $\sigma < 0$  时指数衰减。指数因子的虚部  $\omega$  表征了正弦振荡的角频率。复指数信号的几个特殊情况是: 当  $\sigma = 0$  时,  $s$  为纯虚数, 复指数信号退化为复正弦信号  $Ke^{j\omega t} = K[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$ ; 当  $\omega = 0$  时,  $s$  为实数, 复指数信号退化为一般的实指数信号  $Ke^{\sigma t}$ ; 而当  $\sigma = 0$  且  $\omega = 0$  时,  $s$  为零, 复指数信号退化为直流信号  $K$ 。

虽然实际上不能产生复指数信号, 但它概括了多种情况。利用它, 可以描述各种基本信号, 如直流信号、正弦信号、指数信号、指数衰减或增长信号、指数衰减或增长的正弦信号等。利用它, 还可使许多分析和运算得以简化。

在信号分析理论中, 复指数信号是一种极其重要的基本信号。

### 4. 抽样信号 [ $Sa(t)$ 信号]

抽样信号定义为

$$Sa(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad (1.9)$$

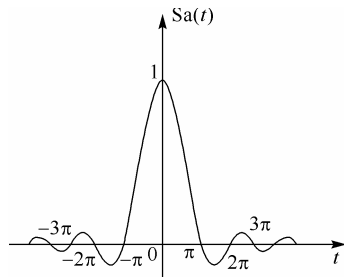


图 1.11  $Sa(t)$  信号

其波形如图 1.11 所示。它是个偶函数, 在  $t$  的正、负两个方向上, 振荡振幅都按倒数规律衰减, 当  $t = 0$  时取最大值 1, 当  $t = n\pi$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$  时取值 0, 其主瓣宽度  $2\pi$  为各副瓣宽度  $\pi$  的两倍。

### 5. 单位阶跃 (Step) 信号

单位阶跃信号定义为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

在跳变点  $t = 0$  处, 函数值未定义, 或者规定在  $t = 0$  处的函数值  $u(0) = 1/2$ , 其波形如图 1.12 (a) 所示。

单位阶跃信号的物理背景是: 在  $t = 0$  时刻对某电路接入单位电源, 并无限持续下去, 如图 1.12 (b) 所示。如果接入电源的时刻推迟到  $t_0$  时刻 (常数  $t_0 > 0$ ), 则可用一个如图 1.12 (c) 所示的延迟单位阶跃信号来表示:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

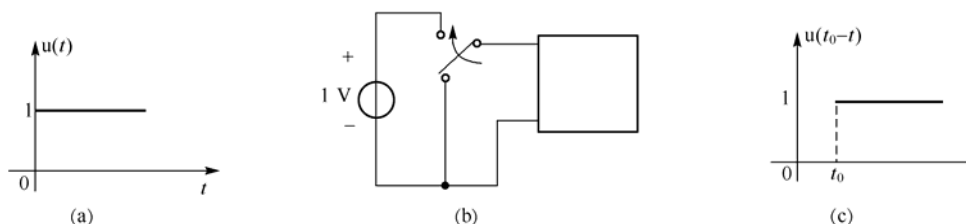


图 1.12 单位阶跃信号

用阶跃信号与其延迟信号之差可表示一矩形脉冲信号(也称为矩形窗信号),如图 1.13(a)或(b)所示,其中图 1.13(a)所示的信号可用

$$G_{0,T}(t) = u(t) - u(t-T) \quad (1.12)$$

表示,而图 1.13(b)所示的信号可用

$$G_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (1.13)$$

表示,这里的下标  $T$  为窗口宽度。

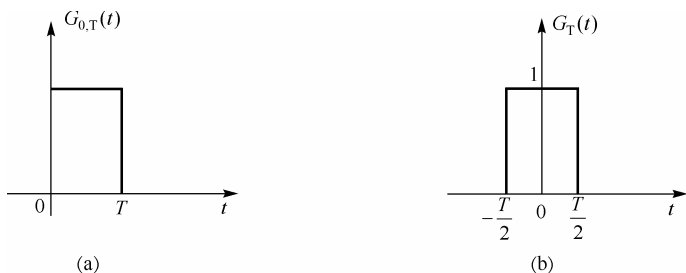


图 1.13 矩形脉冲

类似地,窗函数

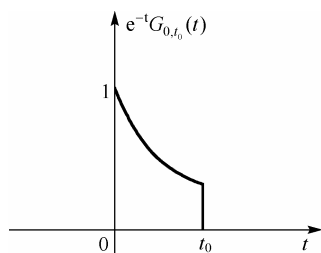
$$G_{t_1,t_2}(t) = u(t-t_1) - u(t-t_2) \quad (1.14)$$

表示在  $t_1$  时刻接入并在  $t_2$  时刻断开的窗信号。因为

$$f(t)G_{t_1,t_2}(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \notin [t_1, t_2] \end{cases} \quad (1.15)$$

所以,我们可用窗信号截取信号在时间区间  $[t_1, t_2]$  上的信号段,以便进行如短时傅里叶变换这样的信号分析。图 1.14 示出了  $e^{-t}G_{0,t_0}(t)$  的波形。

若分段连续函数  $f(t)$  在点集  $\{t_i | i=1,2,\dots,N\}$  有跳变,则它可表示为一连续信号  $f_c(t)$  加上  $N$  个延迟阶跃信号的加权和,即

图 1.14 信号段  $e^{-t}G_{0,t_0}(t)$

$$f(t) = f_c(t) + \sum_{i=1}^N h_i u(t - t_i) \quad (1.16)$$

式中,  $h_i$  是信号在  $t_i$  时刻的带符号的跳变幅度, 向上跳变取正号, 否则取负号。

符号函数定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

与阶跃函数相似, 在  $t = 0$  处, 函数值不作定义, 或者在  $t = 0$  处规定函数值  $\text{sgn}(0) = 0$ 。显然, 它可用阶跃函数表示为

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (1.18)$$

阶跃信号满足  $u(t) + u(-t) = 1$ , 这使得任意信号  $f(t)$  有因果、反因果分解:  $f(t) = f_+(t) + f_-(t)$ , 其中, 信号的因果分量  $f_+(t) = f(t)u(t)$  和反因果分量  $f_-(t) = f(t)u(-t)$ 。阶跃信号的尺度性质可表述为  $u(at) = \begin{cases} u(t) & a > 0 \\ u(-t) & a < 0 \end{cases}$ , 这使得  $u(|a|t) = u(t)$  和  $u(-|a|t) = u(-t) = 1 - u(t)$ 。

阶跃信号可用做示性函数或二值化函数。对信号  $f(t)$  进行阶跃变换  $u(f(t))$  可用来检测  $f(t)$  的符号, 也可用做表示信号具有某种特性的示性函数, 即可借用阶跃变换定义示性函数  $\chi_i\{f(t)\} = \begin{cases} 1 & \text{当信号 } f(t) \text{ 具有第 } i \text{ 个特性时} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$ , 例如  $\chi\{f(t)\} = u(|f(t)| - \text{Th})$  为检验信号  $f(t)$  的模值是否大于阈值  $\text{Th}$  的示性函数。当此功能用于图像灰度信号时, 可把灰度图像变换为二值化图像。

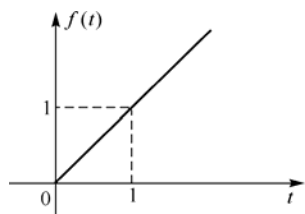


图 1.15 斜坡信号

二值化图像。

## 6. 斜坡信号

易知, 阶跃信号的积分是斜坡 (Ramp) 信号:

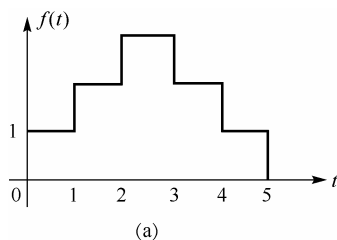
$$r(t) = tu(t) \quad (1.19)$$

如图 1.15 所示。

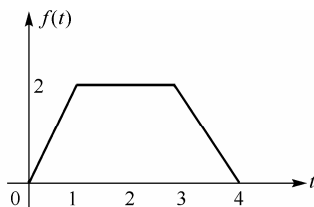
**例 1.2** 写出图 1.16(a), (b) 示出的信号的表达式。

**解** (a)  $f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) - u(t-4) - u(t-5)$ ;

(b)  $f(t) = 2r(t) - 2r(t-1) - 2r(t-3) + 2r(t-4)$ 。



(a)



(b)

图 1.16 例 1.2 的图示

## 7. 冲激信号

冲激 (Impulse) 信号  $\delta(t)$  是个广义函数, 数学上用式 (1.20) 定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{当 } t \neq 0 \text{ 时} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

它可用来表示作用时间极短、取值极大、具有单位总体效应的物理现象，例如数字通信中的采样脉冲。总积分值等于 1 表示该瞬间作用具有单位强度。图 1.17 示出了在  $t_i$  时刻产生强度为  $A$  的信号  $A\delta(t-t_i)$ 。

冲激信号有如下性质。

**性质 1** 当且仅当积分区间包括冲激出现时刻 0 时， $\delta(t)$  函数的积分值为 1，即

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{当 } t_1 < 0 < t_2 \text{ 时} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(1.21)

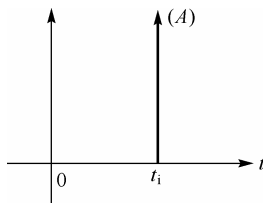


图 1.17  $A\delta(t-t_i)$

**性质 2**  $\delta(t)$  是个偶函数，即

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.22)$$

**性质 3**  $\delta(t)$  具有赋值特性，即

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

特殊地，当  $t_0 = 0$  时，

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (1.23)$$

**性质 4**  $\delta(t)$  具有抽样特性(也称为筛选特性)，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

特殊地，当  $t_0 = 0$  时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (1.24)$$

**性质 5**  $\delta(t)$  是  $u(t)$  的微分；反之， $u(t)$  是  $\delta(t)$  的积分，即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad \text{和} \quad \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.25)$$

上述性质可用于简化含  $\delta(t)$  的运算，如例 1.3 所示。

**例 1.3** 计算下面的各式。

(a)  $t\delta(t-1)$

(b)  $\int_{0_-}^{+\infty} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \delta(t) dt$

(c)  $(1-t) \frac{d}{dt} [e^{-2t} u(t)]$

(d)  $\int_{-1}^2 (t^2 + 1) \delta(t-3) dt$

(e)  $\int_{0_-}^{0_+} e^{-2t} \delta(-t) dt$

(f)  $\int_{-\infty}^t (1-x) \delta(x) dx$

解 (a) 根据性质 3, 有

$$t\delta(t-1) = 1 \cdot \delta(t-1) = \delta(t-1)$$

(b) 根据性质 1 和性质 4, 有

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^{+\infty} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \delta(t) dt \\ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(c) 根据性质 5 和性质 3, 有

$$\begin{aligned} (1-t) \frac{d}{dt} [e^{-2t} u(t)] &= (1-t) [-2e^{-2t} u(t) + e^{-2t} \delta(t)] \\ &= 2(t-1)e^{-2t} u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

(d) 因为  $3 \notin$  区间  $[-1, 2]$ , 因此根据性质 1, 有

$$\int_{-1}^2 (t^2 + 1) \delta(t-3) dt = 0$$

(e) 根据性质 2, 性质 1 和性质 4, 有

$$\int_{0_-}^{0_+} e^{-2t} \delta(-t) dt = \int_{0_-}^{0_+} e^{-2t} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} \delta(t) dt = 1$$

(f) 根据性质 3 和性质 5, 有

$$\int_{-\infty}^t (1-x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = u(t)$$

对于式 (1.16) 所示的信号, 其微分为

$$f'(t) = f'_c(t) + \sum_{i=1}^N h_i \delta(t-t_i) \quad (1.26)$$

**例 1.4** 写出图 1.16(a), (b) 所示信号  $f(t)$  的微分  $f'(t)$  的表达式, 并画出其波形图。

**解** (a)  $f'(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) - \delta(t-3) - \delta(t-4) - \delta(t-5)$

其波形如图 1.18(a) 所示;

(b)  $f'(t) = 2u(t) - 2u(t-1) - 2u(t-3) + 2u(t-4)$

其波形如图 1.18(b) 所示, 这里利用了  $\frac{d}{dt}[tu(t)] = u(t)$ 。

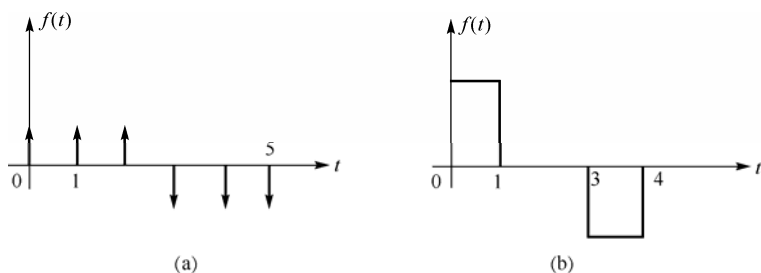


图 1.18 例 1.4 的图示

冲激信号的尺度性质可表述为

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.27)$$

**证明：**由阶跃信号的尺度性质，有  $u(|a|t) = u(t)$ ；把它取微分，由于冲激信号是阶跃信号的微分，所以有  $|a|\delta(|a|t) = \delta(t)$ ；再由冲激信号的偶函数性质，可知  $|a|\delta(at) = |a|\delta(|a|t)$ ；综合上述结果，就有  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$ 。

冲激函数的检零性质表现为：当冲激函数应用于非线性函数时，具有检测其过零点，并反映过零点处的导数的性质，具体地，

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t-t_i) \quad (1.28)$$

**证明：**由于函数在其零点  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )，有  $f(t_i)=0$ ，则在其零点的小领域有线性近似  $f(t) \approx f(t_i) + f'(t_i)(t-t_i) = f'(t_i)(t-t_i)$ ，这使得  $\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \delta[f'(t_i)(t-t_i)]$ ；最后，根据冲激函数的尺度性质，有  $\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t-t_i)$ 。这表明，对信号进行冲激变换时，在信号的零点出现冲激，冲激强度反比于信号的导数模值。

## 1.5 信号的分解

信号分解是信号分析中最常用的技术之一。通常使用加性分量分解，每种分解有其特定的适用范围。例如式(1.16)就是一种，它把信号分解为连续分量与阶跃分量之和，更一般地，信号可分解为连续分量与不连续的奇异分量之和。下面我们再介绍几种常用的分解技术。

### 1. 奇偶分解

任何实信号  $f(t)$  总可以分解为一个偶分量  $f_e(t)$  和一个奇分量  $f_o(t)$  之和。即

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (1.29)$$

式中，

$$\begin{cases} f_e(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \\ f_o(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \end{cases} \quad (1.30)$$

容易验证式(1.29)确实成立，并且  $f_e(t) = f_e(-t)$  和  $f_o(t) = -f_o(-t)$ 。图 1.19 给出了两典型例。直流分量一定属于偶分量。

信号的奇偶分解在分析和理解信号的傅里叶变换或傅里叶级数时很有帮助。

### 2. 交直流分解

任何可积信号总可以分解为一个直流分量和一个交流分量之和，其中直流分量为信号的

平均值，交流分量为信号减去信号的平均值，它的平均值为零。即

$$f(t) = \bar{f} + \tilde{f}(t) \tag{1.31}$$

式中，

$$\text{均值 } \bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt, \quad \text{交流分量 } \tilde{f}(t) = f(t) - \bar{f} \tag{1.32}$$

把信号减去其均值的运算称为中心化变换。它是信号分析中常用的一个技术。

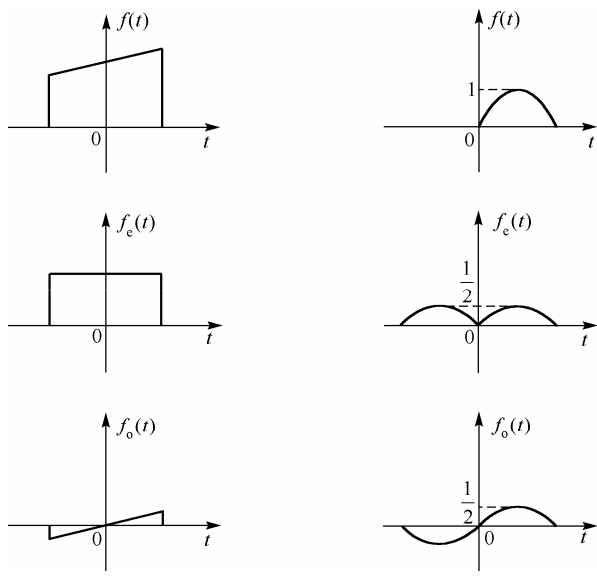


图 1.19 奇偶分解示例

3. 正交分解

信号正交分解的核心是把信号分解为完备、正交、能量归一的基信号集合中的各个基信号的加权和，它非常有益于信号的综合。原则上有无穷多个这样的正交分解，其中最常用的是傅里叶级数分解、傅里叶变换和拉普拉斯变换。其中，傅里叶级数是把周期信号分解成无穷多个谐波正弦信号的加权和，傅里叶变换就是把非周期信号分解成无穷多个频率间隔无穷小的复正弦信号的加权和，而拉普拉斯变换就是把信号分解成无穷多个复指数信号的加权和。

其他的典型例有小波分解、主分量分析等。

1.6 系统的基本概念

信号的运算，包括信号的变换、处理、分析和合成等，都是在由硬、软件组成的系统中进行的。系统可大可小，小到一个简单电路，大到一个复杂的生态系统。大系统可以由若干小的子系统组成。我们主要讨论用电路或电网络构成的系统。

我们称系统的输入信号为激励 (Excitation)，称系统的输出信号为响应 (Response)。

## 1. 系统分类

与信号分类相似,系统分类有多种方法。常用的方法有两种:一是按输入/输出特性分类;二是按系统特性分类。

### (1) 按输入/输出特性分类

如果系统的输入和输出信号都是连续/离散/数字的,则该系统是连续/离散/数字的。如果,输入信号与输出信号是两种不同的信号,例如输入是连续的、输出是离散的,或者相反,输入是离散的、输出是连续的,则称该系统为混合系统,例如一个模拟-数字(A/D)转换器或数字-模拟(D/A)转换器。注意,一个连续系统的内部可能是离散的,实际上,所有应用于实际环境的计算机控制系统就是这样的系统。从整体上看,它是一个连续系统,而其内部包含传感器、A/D 转换器、计算机、D/A 转换器和执行机构五个子系统,它们分别是连续、混合、数字、混合和连续的,如图1.20 所示。

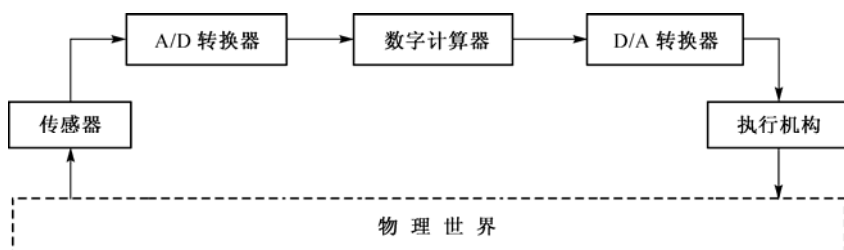


图 1.20 计算机控制系统

### (2) 按系统特性分类

按系统特性分,有线性或非线性系统、时不变或时变系统、因果或非因果系统、稳定或不稳定系统。下面逐一介绍之。

## 2. 线性系统

一个同时满足叠加性和齐次性的系统被定义为线性系统,否则称为非线性系统。

### (1) 可加性

可加性指的是:如果输入  $f_i(t)$  ( $i=1, 2$ ) 时的系统响应(即输出)为  $y_i(t)$  ( $i=1, 2$ ), 则输入  $f_1(t)+f_2(t)$  时的系统响应为  $y_1(t)+y_2(t)$ 。这表示系统处理与加法的次序可交换,即无论是先加法后处理,还是先处理后加法,都得到相同的结果,如图1.21 (a) 所示。

### (2) 齐次性

齐次性指的是:如果输入  $f(t)$  时的系统响应  $y(t)$ , 则输入  $af(t)$  (其中常数  $a \neq 0$ ) 时的系统响应为  $ay(t)$ 。这表示系统处理与常量乘的次序可交换,即无论是先乘法后处理,还是先处理后乘法,都得到相同的结果,如图1.21 (b) 所示。



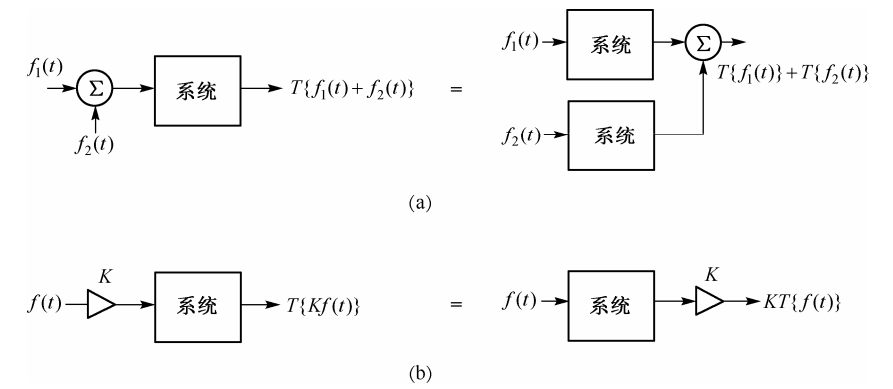


图 1.21 线性系统的(a)可加性和(b)齐次性

(3) 线性

线性指的是：如果输入  $f_i(t)$  ( $i=1,2$ ) 时的系统响应为  $y_i(t)$  ( $i=1,2$ )，则输入  $a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$  (其中  $a_i$  为常数,  $i=1,2$ ) 时的系统响应为  $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ 。这表示系统处理与常量加权求和的次序可交换，即无论是先加权和后处理，还是先处理后加权和，都得到相同的结果。

系统线性的判断可以使用可加性判断、接着齐次性判断的两步法，也可以使用线性特性判断的一步法。注意，只要违反了可加性或齐次性，系统就是非线性的。

使用上述判断准则，容易得出如下结论：

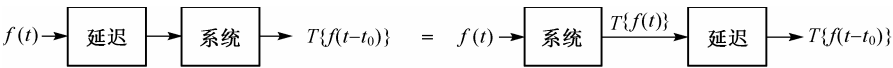
- 平移、翻转和尺度运算都是线性的。
- 乘常数或与输入无关的变量，即恒增益或变增益放大，是线性的。
- 加常数或与输入无关的变量，即固定电平或可变电平偏置，是非线性的。
- 微分和积分运算是线性的。
- 非正比例的即时映射都是非线性的。
- 有零初始状态的线性电路或线性微分方程都是线性的。
- 任何含非线性运算的系统，如非线性的微分方程或电路，都是非线性的。

请读者证明之。

注意，线性特性的要求是很严格的，甚至有非零初始状态的线性电路，或者非零初始状态的线性常微分方程都不是上述意义下的线性系统。下一章将阐述对电路或微分方程定义的线性特性。

3. 时不变系统

时不变系统指的是：如果输入  $f(t)$  时的系统响应为  $y(t)$ ，则输入  $f(t-t_0)$  时的系统响应为  $y(t-t_0)$ ，其中延迟时间  $t_0 \neq 0$ 。这表示系统处理与延迟运算的次序可交换，即无论是先延迟后处理，还是先处理后延迟，都得到相同的结果，也就是说，输入延迟多少时间，输出也延迟多少时间，如图 1.22 所示。



根据此定义，不难知道：

(1) 平移是时不变的；但翻转和尺度运算都是时变的。因为对于翻转而言，输入延迟  $\tau$  时，输出延迟  $-\tau$ ；对于尺度而言，输入延迟  $\tau$  时，输出延迟  $\tau/a$ 。

(2) 乘或加常数，即直流偏置或固定增益放大，是时不变的；而乘或加与输入无关的变量，即交流偏置或时变增益放大，是时变的。因为对于后者而言，所乘或加的与输入无关的变量并不随输入的延迟而延迟。

(3) 微分和下限为  $-\infty$  的积分运算是时不变的；但下限为零的积分却是时变的，如例1.5(f)所证。

(4) 所有即时映射都是时不变的。

(5) 有零初始状态的常参数电路或常系数微分方程是时不变的；而具有非零初始状态的电路或微分方程是时变的。因为初始状态定义于零时刻，它不会随着输入的延迟而延迟到另一时刻；同样地，变系数微分方程中的变系数的时间变量并没有因输入的延迟而延迟。

同时满足线性和时不变性的系统称为线性时不变 (Linear Time-Invariant, LTI) 系统，它是本书的研究对象。

#### 4. 因果系统

因果系统指的是：如果输入  $f(t) = 0 (\forall t < t_0)$ ，则一定有系统响应  $y(t) = 0 (\forall t < t_0)$ ，其中常数  $t_0 \neq 0$ 。这表示在非零输入激励系统之前系统不会有非零响应，同样地，输出一定要在输入变化之后发生变化。一个因果系统一定是物理可实现的系统，反之亦然。

根据此定义，不难知道一个因果系统对因果激励信号的响应一定是因果的。并且，

(1) 向右平移(即延迟)是因果的，而向左平移(即超前)、翻转(即时间倒转)和尺度运算都是非因果的，因为超前和时间倒转都会使将来发生的事情先于现在出现。

(2) 乘法和加法运算是因果的。

(3) 微分是非因果的，因为它与将来时刻的信号值有关；下限为  $-\infty$  的积分运算是因果的，因为它与将来时刻的信号值无关；但下限为零的积分却是非因果的，如例 1.5 (f) 所证。

(4) 所有即时映射都是因果的。

(5) 电路和描述实际物理系统的微分方程都是因果的，因为它们都是物理可实现的。

#### 5. 稳定系统

由于一个能实际应用的系统必须是稳定的，因此稳定性的讨论具有特别重要的地位。

我们对系统稳定性的讨论是建立在有界输入-有界输出 (Bounded-Input Bounded-Output, BIBO) 意义上的，即如果系统能对任何有界输入信号产生有界的输出响应信号，则该系统是稳定的；否则它是不稳定的。

根据此定义，不难知道：

(1) 平移、翻转和尺度运算都是稳定的。

(2) 乘/加取值有限的常量或变量的运算是稳定的。

(3) 微分运算是稳定的，而积分运算却是不稳定的，因为有界函数的积分可能无界。

(4) 即时映射在映射函数有界时才是稳定的。

一般的数学运算或物理实现的系统的稳定性判断相当复杂，它与所讨论的问题有关，往往需使用特定领域中的特定判断方法。本书仅限于讨论其中最简单的 LTI 系统的稳定性，我

们将在第 4 章证明，LTI 系统稳定的充要条件是：系统冲激响应绝对可积，或等价地，系统传递函数的极点都在左半  $s$  平面。

**例 1.5** 判断下述系统是不是线性的、时不变的、因果的、稳定的。

- (a) 绝对值检波器  $y(t)=|f(t)|$ ,      (b) 调制器  $y(t)=f(t)\cos(2\pi t)$ ,      (c)  $y(t)=f(2t)$ ,
- (d)  $y(t)=3f(t+2)+4$ ,      (e)  $y(t)=f(t)-f(t-2)$ ,      (f)  $y(t)=\int_0^t f(x)dx$

**解** (a) 因为取绝对值是非线性运算，因此系统一定是非线性的；又因为  $y(t)=|f(t)|$  时  $y(t-\tau)=|f(t-\tau)|$  一定成立，所以系统是时不变的；取绝对值是即时运算，使输出仅取决于当前时刻的输入值，因此系统一定是因果的；显然取绝对值是一个 BIBO 运算，因此系统稳定。

(b) 因为  $(a_1f_1(t)+a_2f_2(t))\cos(2\pi t)=a_1f_1(t)\cos(2\pi t)+a_2f_2(t)\cos(2\pi t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ ，所以系统是线性的；而  $f(t-\tau)\cos(2\pi t)\neq f(t-\tau)\cos(2\pi(t-\tau))=y(t-\tau)$ ，所以系统是时变的；因为系统执行的是乘一个当前时刻的变量值的运算，因此是系统因果的；由于乘的是一个幅值不大于 1 的量，因此系统一定是稳定的。

(c) 因为  $a_1f_1(2t)+a_2f_2(2t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$ ，所以系统是线性的；由于时间标尺的变化使得输入信号的延迟量与输出信号的延迟量不同，使得先延迟  $\tau$ 、后尺度 2 得到  $f(2t-\tau)$ ，而先尺度 2、后延迟  $\tau$  却得到  $y(t-\tau)=f(2(t-\tau))=f(2t-2\tau)$ ，可见延迟器与系统不可交换，所以系统是时变的；因为在  $t>0$  时，当前时刻  $t$  的系统输出值取决于将来时刻  $2t$  的输入值，因此系统是非因果的；由于函数值域没有变化，因此系统一定是稳定的。

(d) 因为  $y(t)=3(f_1(t+2)+f_2(t+2))+4\neq(3f_1(t+2)+4)+(3f_1(t+2)+4)=y_1(t)+y_2(t)$ ，即不满足可加性，所以系统是非线性的；由于仅牵涉信号平移和偏置，因此系统是时不变的；因为牵涉到信号左移使当前时刻  $t$  的输出值取决于将来时刻  $t+2$  的输入值，因此系统是非因果的；由于  $\text{Max}\{|y(t)|\}=\text{Max}\{|3f(t+2)+4|\}\leq \text{Max}\{|3f(t)|\}+4$ ，因此系统稳定。

(e) 请读者证明系统是线性的、时不变的、因果的、稳定的。

(f) 容易证明系统是线性的； $\int_0^t f(x-\tau)dx=\int_{-\tau}^{t-\tau} f(x)dx\neq\int_0^{t-\tau} f(x)dx=y(t-\tau)$  使得系统是时变的； $t<0$  时  $\int_0^t f(x)dx=-\int_t^0 f(x)dx$ ，这表明当  $t<0$  时， $t$  时刻的输出值取决于它的将来时段  $(t, 0]$  中的输入值，因此系统是非因果的；当激励信号  $f(t)=u(t)$  有界时，输出响应  $y(t)=tu(t)$  却是无界的，因此系统不稳定。

几个常见运算的系统特性总结在表 1.2 中。

表 1.2 常见运算的系统特性

	平移	尺度	放大	变量乘	偏置	变量加	微分	积分	非线性映射
线性特性	是	是	是	不定	否	不定	是	是	否
时不变性	是	否	是	不定	是	不定	是	不定	是
因果性	不定	否	是	是	是	是	否	不定	是
稳定性	是	是	是	不定	是	不定	是	否	不定

对表 1.2 的这几个“不定”的情况，给出如下说明：

- 变量乘或加另一有界信号时，变量乘或加是稳定的，否则是不稳定的。

- 如果变量乘或加的另一信号不随输入的延迟而延迟,则变量乘或加是时变的,否则是时不变;如果另一信号与输入无关,则变量乘是线性的,否则是非线性的;如果另一信号与输入无关,则变量加是非线性的,否则是线性的。
- 下限为 $-\infty$ 的积分运算是因果、时不变的,但下限为常数的积分却是非因果、时变的。
- 在平移中,延迟是因果的,而超前是非因果的。
- 除了无界非线性映射不稳定外;非线性映射是稳定的。

## 1.7 系统分析方法

本书涉及的系统分析内容如下:

- (1) 建立描述 LTI 系统特性的数学方程式,如微分方程,并对给定的激励信号计算系统响应。
- (2) 计算 LTI 系统特性的冲激响应。
- (3) 研究系统的传递函数及其极、零点分布,从而了解系统的频率特性及其各种响应的变化规律。
- (4) 研究系统的稳定性。
- (5) 为用计算机或用电路分析和研究 LTI 系统的特性,讨论系统的模拟。它不但可用于电气系统的实现,也可以进行非电系统的电模拟。

本书介绍的系统分析方法有

- (1) 时域法,主要介绍微分方程(对连续系统)和差分方程(对离散系统)的计算、系统响应的卷积算法(对连续系统)和卷和法(对离散系统)。
- (2) 频域法,主要介绍对连续系统的傅里叶变换和拉普拉斯变换,以及对离散系统的傅里叶变换和 $z$ 变换。
- (3) 状态变量法,主要介绍系统状态方程的建立、系统状态方程的时域法和变域法求解,以及线性变换对状态变量分析的影响。

## 本章小结

1. 信号是随时间变化的某种物理量,它是传送各种消息的工具,经过信号处理与理解,可提取我们感兴趣的信息。常见的信号形式是连续信号和离散信号。
2. 信号的运算包括对时间变量而言的平移、翻转和尺度等变换,对函数值而言的偏置、放大、相加、相乘、微分、积分、映射等以及更复杂的运算。
3. 单位冲激和单位阶跃是两个很重要的信号,它们有许多重要性质,这些性质在信号处理和分析中有广泛的应用。两者之间的关系是:前者是后者的微分,后者是前者的积分。
4. 信号运算是在系统中完成的,系统是由若干个按一定规则相互联接并完成确定功能的部件或子系统组成的有机整体。它可分为连续系统、离散系统和混合系统三大类。
5. 同时满足可加性和齐次性的系统是线性系统,对延迟后的激励产生有相同延迟的响应的系统是时不变系统,响应不超前于激励的系统是因果系统,对有界输入产生有界输出的系统是稳定系统。

6. 本书主要研究因果的、稳定的、线性时不变系统。

习 题

1.1 判断题图 1.1 所示各信号是否满足周期性和因果性，并指出哪些信号是连续时间信号，哪些是离散时间信号。

1.2 给定题图 1.2 所示信号  $f(t)$ ，画出下列信号的波形：

(a)  $3f(t-3)$

(b)  $f(-t+2)$

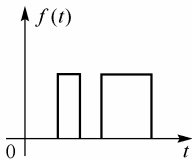
(c)  $f(2t-3)$

(d)  $f\left(-\frac{t}{2}-1\right)$

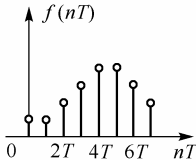
(e)  $\frac{d}{dt}f(t)$

(f)  $\int_{-\infty}^t f(x)dx$

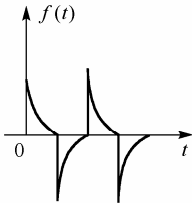
1.3 给定题图 1.3 所示信号  $f(3-2t)$ ，画出信号  $f(t)$  和  $f'(t)$  的波形。



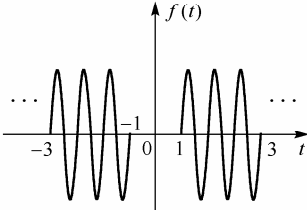
(a) 电报信号



(b) 温度信号

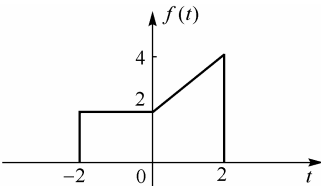


(c) 触发脉冲

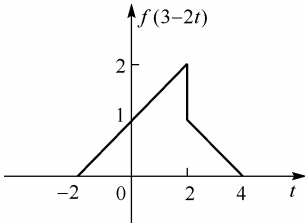


(d) 高频脉冲

题图 1.1



题图 1.2



题图 1.3

1.4 已知信号  $f(t)$ ，为求信号  $f(t_0 - at)$ ，应按下列哪种运算才能求得正确结果？

(a)  $f(-at)$  左移  $t_0$

(b)  $f(-at)$  右移  $t_0$

(c)  $f(at)$  左移  $t_0/a$

(d)  $f(-at)$  右移  $t_0/a$

1.5 粗略画出下列各信号的波形：

(a)  $f(t) = (1 - e^{-t})u(t)$

(b)  $f(t) = e^{-|t|} \quad -\infty < t < +\infty$

(c)  $f(t) = u(t+2) - u(t-2)$

(d)  $f(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t+1)$

(e)  $f(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-2)$

(f)  $f(t) = u(t) + u(t-2) + u(t-4)$

(g)  $f(t) = u(t+2) - 2u(t) + u(t-2)$

(h)  $f(t) = u(t+2) - u(t+1) - u(t-1) + u(t-2)$

(i)  $f(t) = \sin(\pi t)u(t)$

(j)  $f(t) = (u(t) - u(t-6))\sin(\pi t)$

(k)  $f(t) = u(\sin(\pi t))$

(l)  $f(t) = (u(t) - 2u(t-4) + u(t-8))\sin(\pi t)$

(m)  $f(t) = (5e^{-t} - 5e^{-3t})u(t)$

(n)  $f(t) = e^{-t} \cos(10\pi t)[u(t-1) - u(t-2)]$

(o)  $f(t) = t e^{-t} u(t)$

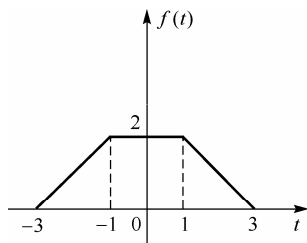
(p)  $\frac{d}{dt} [e^{-t} \sin t \cdot u(t)]$

(q)  $f(t) = \text{Sa}(2t - \pi)$

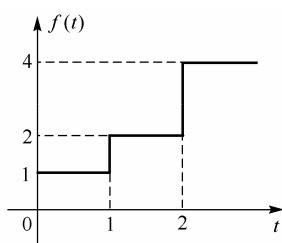
(r)  $f(t) = \text{sgn}(\sin(\pi t))$

(s)  $f(t) = (u(t) - 2u(t-4) + u(t-8))\sin(\pi t)$

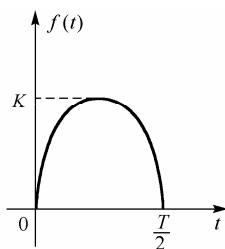
1.6 用阶跃函数写出题图 1.6 所示各波形的函数表达式其中, 题图 1.6(c) 是半个正弦波。



(a)



(b)



(c)

题图 1.6

1.7 计算下列各题:

(a)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt$

(b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} u\left(t - \frac{t_0}{2}\right)\delta(t-t_0)dt$

(c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-t} + t)\delta(t+2)dt$

(d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\sin t + t)\delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)dt$

(e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} (\delta(t) - \delta(t-t_0))dt$

(f)  $\int_{-1}^2 (e^{-t} + t)\delta(t-3)dt$

(g)  $\int_{0_+}^{0_-} (e^{-t} + t)\delta(-t+3)dt$

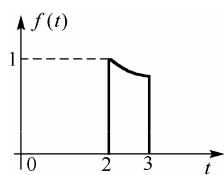
(h)  $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^3 + t^2 - 2t + 1)\delta(t+1)dt$

(i)  $(1-t)\frac{d}{dt}(e^{-3t}u(t))$

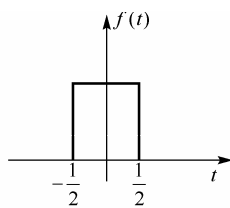
(j)  $\frac{d}{dt} \{[\cos t + \sin(2t)]u(t+2)\}$

(k)  $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 2)\delta\left(\frac{t}{2}\right)dt$

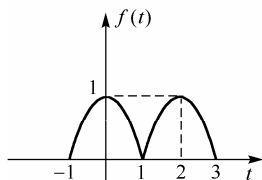
1.8 写出题图 1.8 所示各波形的表示式, 并画出其偶分量和奇分量。



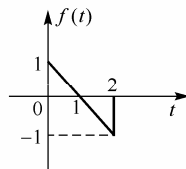
(a)



(b)



(c)



(d)

题图 1.8

1.9 判断完成下列各运算的系统是否是线性的、时不变的、因果的、稳定的：

(a)  $\frac{d}{dt} f(t)$

(b)  $\int_{-\infty}^t f(x) dx$

(c)  $\int_0^t f(x) dx$

(d)  $f(-t)$

(e)  $|f(t)|$

(f)  $f(t)\sin(\pi t)$

(g)  $f(t) + \sin(\pi t)$

(h)  $f(2t)$

(i)  $u(f(-t))$

(j)  $f(t)u(t)$

(k)  $f^2(t)$

## 第 2 章 连续时间系统的时域分析

### 学习要点

本章讨论连续信号与系统的时域分析。读者学习本章要注意掌握以下重要内容：

1. 线性时不变系统的微分方程描述及其响应；
2. 零输入响应和零状态响应的分析和计算；
3. 冲激响应和阶跃响应的分析和计算；
4. 卷积的概念及其计算。

### 2.1 系统的微分方程描述及其响应

#### 1. 系统微分方程及其初始条件的建立

线性时不变系统是最简单、最常见、应用最广泛的一类系统，例如各种线性电路和脉冲电路。这类系统输入-输出特性的数学描述是具有某初始条件的常系数线性微分方程。从电路分析入手，建立系统微分方程，并计算系统的时域响应。这就是系统的时域分析法，它是研究系统时域特性的有效方法。

为了建立一个特定电路的微分方程及其初始条件，我们必须利用电路中的各元器件的伏安特性、欧姆定理、基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff's Current Law, KCL)，基尔霍夫电压定律 (Kirchhoff's Voltage Law, KVL)、戴维南定理、叠加原理、互易原理等电路理论。

具体地，KCL 表明：若规定所有连接到电路任一节点的支路电流都流入(或流出)该节点，则流入(或流出)电路该节点的电流之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{N_j} i_{jk}(t) = 0 \quad (2.1)$$

式中， $N_j$  是连接到节点  $j$  的支路个数； $i_{jk}(t)$  是连接到节点  $j$  的第  $k$  条支路的电流。

KVL 表明：若规定所有连接到电路任一回路的支路压降方向都与该回路的前进方向相同，则该回路的支路压降之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{N_j} u_{jk}(t) = 0 \quad (2.2)$$

式中， $N_j$  是连接到回路  $j$  的支路个数； $u_{jk}(t)$  是连接到回路  $j$  的第  $k$  条支路的电压。

当规定电流方向与压降方向相同时，电路的基本元件电阻  $R$ 、电容  $C$  和电感  $L$  的伏安特性分别是

$$u_R(t) = Ri_R(t) \quad (2.3)$$



$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt, \quad i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \quad (2.4)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt, \quad u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \quad (2.5)$$

如果在零时刻切换电路的激励, 则切换后的各元件的伏安特性分别是

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt, \quad \text{即 } i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t), \quad \text{其中 } u_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(t) dt \quad (2.6)$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt, \quad \text{即 } u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t), \quad \text{其中 } i_L(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L(t) dt \quad (2.7)$$

式(2.6)和式(2.7)表明, 电感、电容等储能元件上的初始状态“记忆”了输入在过去阶段中的变化。这意味着, 系统初始状态是系统“记忆”了过去阶段的输入并在初始时刻表现的形态, 它对系统在切换时刻后的响应的作用与系统过去阶段的输入对此响应的作用相互等效。

如果用  $0_-$  表示换路时刻的前一瞬间, 用  $0_+$  表示换路时刻的后一瞬间, 则由电容上的电压不能突变和电感上的电流不能突变的原理, 有换路定律:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (2.8)$$

依据上述电路知识, 可以建立一个特定电路的微分方程及其初始条件。

**例 2.1** 要求列出图2.1(a)所示的以流过电阻  $R_1$  上的电流  $i(t)$  为响应的电路的微分方程及其初始条件。图 2.1(b) 示出了它的带有初始条件的等效电路。

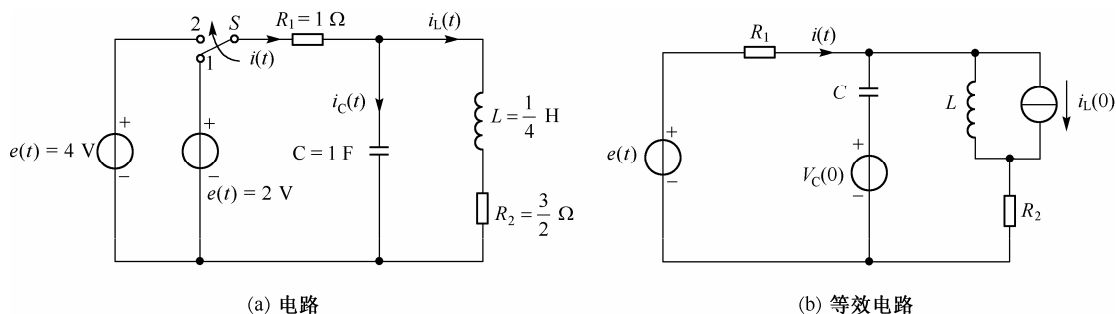


图 2.1 例 2.1 的电路

**解** (1) 建立微分方程

对此电路利用 KCL 和 KVL 后, 有  $u_C(t) = e(t) - R_1 i(t)$ , 这使得

$$i_L(t) = i(t) - Cu'_C(t) = i(t) - Ce'(t) + R_1 Ci'(t)$$

把它代入

$$e(t) - R_1 i(t) - R_2 i_L(t) = u_L(t) = Li'_L(t)$$

整理后, 有微分方程

$$i''(t) + \left( \frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right) i'(t) + \frac{R_1 + R_2}{LR_1 C} i(t) = \frac{1}{R_1} e''(t) + \frac{R_2}{LR_1} e'(t) + \frac{1}{LR_1 C} e(t)$$

再把元件参数代入后,有

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t) \quad (2.9)$$

### (2) $0_-$ 时刻的初始条件计算

由于切换前电路已稳定,所以有

$$i_L(0_-) = \frac{e_-(t)}{R_1 + R_2} = \frac{2}{1 + 1.5} = 0.8 \text{ A} \quad \text{和} \quad u_C(0_-) = R_2 i_L(0_-) = 1.5 \times 0.8 = 1.2 \text{ V}$$

这使得

$$i(0_-) = \frac{e(0_-) - u_C(0_-)}{R_1} = \frac{2 - 1.2}{1} = 0.8 \text{ A}$$

同时有

$$i'(0_-) = 0 \text{ A/s}$$

### (3) $0_+$ 时刻的初始条件计算

由式(2.8)可知

$$i_L(0_+) = 0.8 \text{ A} \quad \text{和} \quad u_C(0_+) = 1.2 \text{ V}$$

这使得

$$i(0_+) = \frac{e(0_+) - u_C(0_+)}{R_1} = \frac{4 - 1.2}{1} = 2.8 \text{ A}$$

和

$$\begin{aligned} i'(0_+) &= \frac{e'(0_+) - u'_C(0_+)}{R_1} \\ &= \frac{1}{R_1} \left[ e'(0_+) - \frac{1}{C} (i(0_+) - i_L(0_+)) \right] \\ &= \frac{1}{1} \left[ 0 - \frac{1}{1} (2.8 - 0.8) \right] = -2 \text{ A/s} \end{aligned}$$

这里得到的初始条件  $i(0_+)$  和  $i'(0_+)$  用于计算全响应。

为计算零输入响应和零状态响应,需要各自对应的初始条件。

利用叠加原理,可把图 2.1 (b) 所示的等效电路分解为如图 2.2 (a) 和图 2.2 (b) 所示的零输入等效电路 [外部电源  $e(t) = 0$  时的等效电路] 和零状态等效电路 [内部电源  $u_C(0) = 0$  和  $i_L(0) = 0$  时的等效电路]。

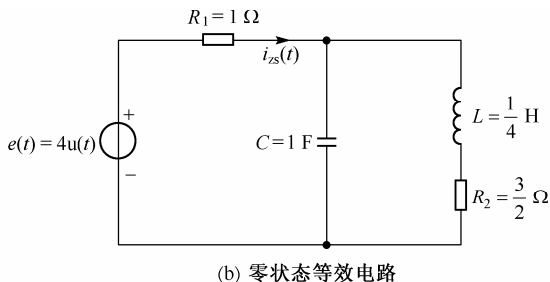
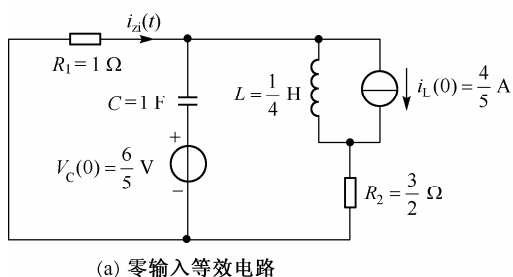


图 2.2 例 2.1 所示电路的等效电路

令式(2.9)中的  $e(t) = 0$ , 可以得到零输入时的系统微分方程

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = 0$$

为计算零输入条件下的 $0_+$ 时刻的初始条件, 利用电容电压和电感电流不能突变的原理, 可得其 $0_+$ 时刻初始条件为

$$i_{zi}(0_+) = \frac{-u_c(0_+)}{R_1} = \frac{-1.2}{1} = -1.2 \text{ A}$$

和 
$$i'_{zi}(0_+) = \frac{-u'_c(0_+)}{R_1 C} = -\frac{1}{R_1 C} [i(0_+) - i_L(0_+)] = -\frac{1}{1} [-1.2 - 0.8] = 2 \text{ A/s}$$

类似地, 从图 2.2 (b) 的零状态等效电路, 可知 $0_+$ 时刻的零状态初始条件为 $i_{zs}(0_+) = 4 \text{ A}$ 和 $i'_{zs}(0_+) = -4 \text{ A/s}$ 。

已知微分方程和 $0_+$ 时刻初始条件后, 就可通过待定常数法使用经典微分方程求解技术来计算全响应。其计算过程将在后面的内容中论述。

实际上, 在已知微分方程、 $0_-$ 时刻初始条件和输入激励时, 可以直接使用“冲激匹配法”求解 $0_+$ 时刻初始条件。我们用例 2.1 来说明如何使用该方法。

对于求解全响应而言, 此二阶系统的输入 $u_s(t)$ 的跳变分量是 $\Delta e(t) = 2u(t)$ , 它使得 $e'(t)$ 和 $e''(t)$ 在零时刻分别变化 $\Delta e'(t) = 2\delta(t)$ 和 $\Delta e''(t) = 2\delta'(t)$ 。显然, 为了使微分方程的两边在零时刻发生的变化互相匹配, 应假设 $i''(t)$ 在零时刻发生的变化是 $\Delta i''(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + cu(t)$ , 对其积分后, 可知 $i'(t)$ 在零时刻发生的变化 $\Delta i'(t) = a\delta(t) + bu(t)$ , 其中 $\Delta i'(0) = i'(0_+) - i'(0_-)$ , 再对其积分后, 有 $i(t)$ 在零时刻发生的变化 $\Delta i(t) = au(t)$ , 其中 $\Delta i(0) = i(0_+) - i(0_-)$ 。需要说明的是, 在积分 $\Delta i''(t)$ 得到 $\Delta i'(t)$ 和积分 $\Delta i'(t)$ 得到 $\Delta i(t)$ 的过程中, 都去除了在零时刻不发生变化的连续分量。把它们都代入式 (2.9) 给出的微分方程, 并使对应函数的系数值相等, 就有 $a = 2$ 和 $b = -2$ , 使得 $\Delta i(t) = 2u(t)$ 和 $\Delta i(t) = 2\delta(t) - 2u(t)$ , 即 $\Delta i(0) = 2$ 和 $\Delta i'(0) = 0 - 2 = -2$ , 其中利用了 $\delta(0_+) = 0$ 。这样就得到了 $i(0_+) = i(0_-) + \Delta i(0) = 0.8 + 2 = 2.8 \text{ A}$ 和 $i'(0_+) = i'(0_-) + \Delta i'(0) = 0 - 2 = -2 \text{ A/s}$ 。这与上述从电路分析得出的结果相同。

需要说明的是, 本质上, 冲激匹配法仅考虑奇异分量对系统初始值突变的影响。

## 2. 连续系统的时域分析

系统时域分析包括系统冲激响应、阶跃响应、零状态响应、零输入响应和全响应等的分析计算。

### (1) 零输入响应和零状态响应的概念

#### ① 零输入响应和零状态响应的定义

对图 2.1 (b) 所示的电路, 利用叠加原理易知, 系统在 $0_+$ 时刻后的响应为激励电压源 $e(t)$ 和内部电源 $u_c(0)$ ,  $i_L(0)$ 分别产生的响应之和, 即 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ 。其中, 在图 2.2 (b) 所示的零状态等效电路中, 单独由激励电源产生的响应称为零状态响应 (Zero-State Response), 记为 $y_{zs}(t)$ , 而在图 2.2 (a) 所示的零输入等效电路中, 单独由内部电源产生的响应称为零输入响应 (Zero-Input Response), 记为 $y_{zi}(t)$ 。因为前者为在零初始状态条件下由输入 $e(t)$ 产生的响应, 后者可等效为微分方程在零输入条件下由初始状态 $i(0_+)$ 和 $i'(0_+)$ 产生的响应, 因此有定义:

#### (a) 零输入响应

从观察的初始时刻起不再施加输入激励(即零输入), 仅由该系统本身在该时刻具有的初始状态引起的响应 $y_{zi}(t)$ 称为零输入响应。

(b) 零状态响应

在初始状态为零(即零状态)的条件下, 仅由该系统在初始时刻后的输入引起的响应  $y_{zs}(t)$  称为零状态响应。

②用冲激匹配法计算零输入和零状态时的  $0_+$  时刻初始条件

为了用经典微分方程求解技术计算零输入响应和零状态响应, 需要计算它们的  $0_+$  时刻初始条件。如前所述, 一个方法是使用响应的等效电路, 依据电容电压和电感电流不突变的换路定律计算; 另一个方法是使用冲激匹配法。由于零输入响应是输入为零时的全响应, 零状态响应是初始条件为零的全响应, 所以冲激匹配法也可用于计算零输入或零状态时的  $0_+$  时刻初始条件。

对于零输入, 使用冲激匹配法可知, 由  $e(0_-)=2$  至  $e(0_+)=0$  的输入跳变  $-2u(t)$ 。由前述已知当  $\Delta e(t)=2u(t)$  时引起输出  $i(t)$  和  $i'(t)$  在零时刻的突变分别为 2 和 -2, 这样根据线性特性,  $-2u(t)$  的输入跳变就应引起输出  $i(t)$  和  $i'(t)$  在零时刻分别突变 -2 和 2。这使得切换后的初始条件为

$$i_{zi}(0_+) = i_{zi}(0_-) - 2 = -1.2 \text{ A} \quad \text{和} \quad i'_{zi}(0_+) = i'_{zi}(0_-) + 2 = 2 \text{ A/s}$$

同理, 对于零状态, 使用冲激匹配法和线性特性可知, 由  $e(0_-)=0$  至  $e(0_+)=4$  的输入跳变  $4u(t)$  引起输出  $i(t)$  和  $i'(t)$  在零时刻的突变分别为 4 和 -4。这使得切换后的初始条件为

$$i_{zs}(0_+) = i_{zs}(0_-) + 4 = 4 \text{ A} \quad \text{和} \quad i'_{zs}(0_+) = i'_{zs}(0_-) - 4 = -4 \text{ A/s}$$

使用冲激匹配法求解  $0_+$  时刻初始条件的过程和结果如表 2.1 所示。

表 2.1 从  $0_-$  初始条件至  $0_+$  初始条件的计算

计算类型	$e(0_-)$	$e(0_+)$	$\Delta e(0)$	$i(0_-)$	$i'(0_-)$	$\Delta i(0)$	$\Delta i'(0)$	$i(0_+)$	$i'(0_+)$
全响应	2	4	2	0.8	0	2	-2	2.8	-2
零输入响应	2	0	-2	0.8	0	-2	2	-1.2	2
零状态响应	0	4	4	0	0	4	-4	4	-4

其中,  $\Delta e(0) = e(0_+) - e(0_-)$ ,  $i(0_+) = i(0_-) + \Delta i(0)$  和  $i'(0_+) = i'(0_-) + \Delta i'(0)$ 。

(2) 线性系统的概念

由电路的线性叠加原理易知: 当初始状态为零时, 系统的零状态响应对输入信号呈现线性(包括可加性和齐次性), 这称为零状态线性; 当输入为零时, 系统的零输入响应对系统初始状态呈现线性, 这称为零输入线性。这样, 我们定义:

一个既具有零输入响应和零状态响应分解特性, 又具有零输入线性和零状态线性的系统称为线性系统, 否则称为非线性系统。

(3) 全响应的定义

系统在初始条件下对初始时刻后的输入在初始时刻后产生的响应称为全响应。

线性系统的全响应等于零状态响应与零输入响应之和, 即

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \quad (2.10)$$

#### (4) 冲激响应和阶跃响应的定义

有两个特别有用的零状态响应——冲激响应和阶跃响应。

##### (a) 冲激响应的定义

LTI 系统对单位冲激激励信号的零状态响应称为该系统的冲激响应  $h(t)$ , 即

$$h(t) = y_{zs}(t) \Big|_{f(t)=\delta(t)} \quad (2.11)$$

##### (b) 阶跃响应的定义

LTI 系统对单位阶跃激励信号的零状态响应称为该系统的阶跃响应  $s(t)$ , 即

$$s(t) = y_{zs}(t) \Big|_{f(t)=u(t)} \quad (2.12)$$

虽然冲激响应和阶跃响应是两个特殊的零状态响应, 但它们却是系统固有的与输入无关的时域特性。并且, 它们之间有密切关系。

##### (c) 冲激响应与阶跃响应的关系

由于冲激信号是阶跃信号的微分, 而阶跃信号是冲激信号的积分, LTI 系统的零状态线性导致系统零状态响应与微积分运算的可交换, 因此, LTI 系统的冲激响应是其阶跃响应的微分, 而阶跃响应是冲激响应的积分, 即

$$h(t) = \frac{d}{dt}s(t), \quad s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

#### (5) 卷积的定义

信号  $f_1(t)$  与信号  $f_2(t)$  的卷积定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

#### (6) 系统响应与冲激响应的关系

由冲激信号  $\delta(t)$  的抽样特性, 可把任何信号  $f(t)$  表示为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau = f(t) \quad (2.15)$$

考虑到因果系统在  $-\infty$  时刻总是处于零状态, 因此利用 LTI 系统的零状态响应的线性时不变性, 可知, 系统对  $f(t)$  的响应为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau = h(t) * f(t) \quad (2.16)$$

式(2.16)表明, LTI 系统的(零状态)响应是其冲激响应  $h(t)$  与激励信号  $f(t)$  的卷积。

由于输入激励信号  $f(t)$  总可分解为因果分量  $f_+(t) = f(t)u(t)$  与反因果分量  $f_-(t) = f(t)u(-t)$  之和, 即  $f(t) = f_+(t) + f_-(t)$ , 因此, LTI 系统对  $f(t)$  的响应为这两个分量的零状态响应, 即全响应等于零状态响应和零输入响应之和。其中, 零状态响应为系统对  $f_+(t)$  的零状态响应, 而零输

入响应为系统对  $f_-(t)$  的零状态响应的因果分量(因为我们仅感兴趣于  $t > 0$  时的系统响应):

$$\begin{cases} y_{zs}(t) = h(t) * f_+(t) = u(t) \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \\ y_{zi}(t) = u(t) [h(t) * f_-(t)] = u(t) \int_{-\infty}^0 h(t-\tau) f(\tau) d\tau \end{cases} \quad (2.17)$$

式(2.17)表明, LTI 系统的零状态响应就是系统在零状态条件下对  $f_+(t)$  的响应, 而其零输入响应就是系统在零状态条件下对  $f_-(t)$  响应的因果分量。

### 3. 使用零状态线性和零输入线性计算系统响应

利用线性系统的可分解性、零输入线性和零状态线性, 可以方便地计算系统响应。下面举两例进行说明。

**例2.2** LTI 系统在某初始状态下对激励  $f(t)$  和  $2f(t)$  的全响应分别为  $y_1(t) = [e^{-t} + \cos(\pi t)]u(t)$  和  $y_2(t) = 2\cos(\pi t)u(t)$ , 求在该初始状态下对激励  $3f(t)$  的全响应  $y_3(t)$ 。

**解** 由于初始状态在三种激励情况保持不变, 所以它们的全响应有同一个零输入响应, 变化的仅是零状态响应。根据零状态线性可知, 系统对激励  $f(t)$  的零状态响应为  $y_{zs}(t)|_{f(t)} = y_3(t) - y_2(t) = y_2(t) - y_1(t)$ , 这使得系统对激励  $3f(t)$  的全响应为  $y_3(t) = 2y_2(t) - y_1(t) = [-e^{-t} + 3\cos(\pi t)]u(t)$ 。

**例2.3** 某二阶 LTI 系统的初始状态是  $x_1(0)$  和  $x_2(0)$ 。已知: 当  $x_1(0) = 1$  和  $x_2(0) = 0$  时, 系统的零输入响应为  $y_{zi1}(t) = [e^{-t} + e^{-2t}]u(t)$ ; 当  $x_1(0) = 0$  和  $x_2(0) = 1$  时, 系统的零输入响应为  $y_{zi2}(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$ ; 当  $x_1(0) = 1$  和  $x_2(0) = -1$  时, 系统对激励  $f(t)$  的全响应为  $y_3(t) = [2 + e^{-t}]u(t)$ 。求当  $x_1(0) = 3$  和  $x_2(0) = 2$  时, 系统对激励  $2f(t)$  的全响应  $y_4(t)$ 。

**解** 定义系统对  $f(t)$  的零状态响应为  $y_{zs}(t)$ , 初始状态矢量为  $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$ , 则由零状态线性知, 系统对  $2f(t)$  的零状态响应为  $2y_{zs}(t)$ ; 由  $\mathbf{X}_3(0) = \mathbf{X}_1(0) - \mathbf{X}_2(0)$  和零输入线性知,  $y_{zi3}(t) = y_{zi1}(t) - y_{zi2}(t)$ , 把它代入  $y_3(t) = y_{zs}(t) + y_{zi3}(t)$  后, 有  $y_{zs}(t) = y_3(t) - y_{zi1}(t) + y_{zi2}(t)$ ; 同样,  $\mathbf{X}_4(0) = 3\mathbf{X}_1(0) + 2\mathbf{X}_2(0)$  和零输入线性使得  $y_{zi4}(t) = 3y_{zi1}(t) + 2y_{zi2}(t)$ , 把它和  $y_{zs}(t) = y_3(t) - y_{zi1}(t) + y_{zi2}(t)$  一起代入  $y_4(t) = 2y_{zs}(t) + y_{zi4}(t)$ , 合并同类项后, 再代入已知条件并合并同类项, 有

$$y_4(t) = 2y_3(t) + y_{zi1}(t) + 4y_{zi2}(t) = [4 + 7e^{-t} - 3e^{-2t}]u(t)$$

### 4. 系统响应的经典计算方法

用数学归纳法可以证明,  $(e^{\lambda_k t})^{(n)} = \lambda_k^n e^{\lambda_k t}$ , 所以, 当  $y(t) = e^{\lambda_k t}$  时, 有  $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = e^{\lambda_k t} \sum_{i=0}^n a_i \lambda_k^i = 0$ 。这表明, 当  $\lambda_k$  是特征方程  $\sum_{i=0}^n a_i \lambda^n = 0$  的根时,  $e^{\lambda_k t}$  是齐次微分方程

$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0$  的特征函数, 并且齐次微分方程的通解是  $y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k t}$ ; 而非齐次微分方程

$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j f^{(j)}(t)$  的通解为  $y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k t} + B(t)$ , 其中特解  $B(t)$  取决于通过系统的输入激励, 并且当输入为零时  $B(t) = 0$ 。

我们仍用例 2.1 来说明 LTI 系统的零输入响应、零状态响应和全响应的求解过程。

此时, 微分方程为

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$$

由表 2.1 可知, 计算全响应的初始条件为

$$i(0_+) = 2.8 \text{ A} \quad \text{和} \quad i'(0_+) = -2 \text{ A/s}$$

计算零输入响应的初始条件为

$$i_{zi}(0_+) = -1.2 \text{ A} \quad \text{和} \quad i'_{zi}(0_+) = 2 \text{ A/s}$$

计算零状态响应的初始条件为

$$i_{zs}(0_+) = 4 \text{ A} \quad \text{和} \quad i'_{zs}(0_+) = -4 \text{ A/s}$$

### (1) 零输入响应求解

零输入响应是系统微分方程在零输入时的齐次微分方程  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = 0$  在其  $0_+$  时刻初始条件  $i_{zi}(0_+) = -1.2 \text{ A}$  和  $i'_{zi}(0_+) = 2 \text{ A/s}$  下的响应。根据微分方程理论, 其求解过程如下: 由于其特征方程为

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

使得特征根为

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{和} \quad \lambda_2 = -5$$

这样, 零输入响应有形式

$$i_{zi}(t) = (A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}) u(t) = (A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t}) u(t)$$

其中,  $A_1$  和  $A_2$  是由初始条件确定的待定常数。

考虑到

$$i'_{zi}(t) = -(2A_1 e^{-2t} + 5A_2 e^{-5t}) u(t)$$

有

$$i_{zi}(0_+) = A_1 + A_2 = -1.2 \quad \text{和} \quad i'_{zi}(0_+) = -(2A_1 + 5A_2) = 2$$

这给出

$$A_1 = -\frac{4}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{15}$$

从而使

$$i_{zi}(t) = \left( -\frac{4}{3} e^{-2t} + \frac{2}{15} e^{-5t} \right) u(t)$$

### (2) 零状态响应的求解

零状态响应  $i_{zs}(t)$  是系统微分方程  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$  在  $0_+$  初始条件

$i_{zs}(0_+) = 4 \text{ A}$  和  $i'_{zs}(0_+) = -4 \text{ A/s}$  下, 由激励  $f(t) = 4u(t)$  产生的响应。它由齐次解  $i_{hg}(t)$  和特解  $i_{sp}(t)$  两个分量组成, 即

$$i_{zs}(t) = i_{hg}(t) + i_{sp}(t)$$

其中, 特解  $i_{sp}(t)$  是由输入激励确定的一个解。对本例, 有

$$i_{sp}(t) = \frac{8}{5}u(t)$$

而齐次解是满足相应的齐次方程的解, 它有形式

$$i_{hg}(t) = (B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-5t})u(t)$$

使得

$$i_{zs}(t) = B_1 e^{-2t} + B_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \quad \text{和} \quad i'_{zs}(t) = -2B_1 e^{-2t} - 5B_2 e^{-5t}$$

其中, 待定常数  $B_1$  和  $B_2$  由  $0_+$  初始条件  $i_{zs}(0_+) = 4 \text{ A}$  和  $i'_{zs}(0_+) = -4 \text{ A/s}$  确定。代入初始条件 后, 有

$$B_1 + B_2 + \frac{8}{5} = 4 \quad \text{和} \quad -2B_1 - 5B_2 = -4$$

从而可得

$$B_1 = \frac{8}{3} \quad \text{和} \quad B_2 = -\frac{4}{15}$$

这使得

$$i_{zs}(t) = \left( \frac{8}{5} + \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} \right)u(t)$$

### (3) 全响应的求解

全响应是系统微分方程  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$  在  $0_+$  初始条件  $i(0_+) = 2.8 \text{ A}$  和  $i'(0_+) = -2 \text{ A/s}$  下, 由激励  $f(t) = 4u(t)$  产生的响应  $i(t)$ 。它由齐次解  $i_{hg}(t)$  和特解  $i_{sp}(t)$  两个分量组成, 即

$$i(t) = i_{hg}(t) + i_{sp}(t)$$

其中, 特解  $i_{sp}(t)$  是由输入激励确定的一个解。对本例, 有

$$i_{sp}(t) = \frac{8}{5}u(t)$$

而齐次解是满足相应的齐次方程的解, 它有形式

$$i_{hg}(t) = (C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t})u(t)$$

使得

$$i(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \quad \text{和} \quad i'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 5C_2 e^{-5t}$$

其中, 待定常数  $C_1$  和  $C_2$  由  $0_+$  初始条件  $i(0_+) = 2.8 \text{ A}$  和  $i'(0_+) = -2 \text{ A/s}$  确定。代入初始条件 后, 有

$$C_1 + C_2 + \frac{8}{5} = \frac{14}{5} \quad \text{和} \quad -2C_1 - 5C_2 = -2$$



从而可得

$$C_1 = \frac{4}{3} \quad \text{和} \quad C_2 = -\frac{2}{15}$$

这使得

$$i(t) = \left( \frac{8}{5} + \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} \right) u(t)$$

系统的全响应确实如所预期的那样等于零输入响应和零状态响应之和, 即

$$\begin{aligned} i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) &= \underbrace{\left( -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t} \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left( \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5} \right)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\left( \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} \right)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\left( \frac{8}{5} \right)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\left( \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} \right)}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\left( \frac{8}{5} \right)}_{\text{稳态响应}} \quad t > 0 \end{aligned}$$

上式表明, 系统的全响应也可分解为一个自由响应分量和一个强迫响应分量之和, 或者一个暂态响应分量和一个稳态响应分量之和。其中, 自由响应分量是与系统特征根相应的分量, 强迫响应分量是与系统激励相应的分量; 稳态响应分量是当  $t \rightarrow +\infty$  时不消失的分量, 而当  $t \rightarrow +\infty$  时消失的分量称为暂态分量。

#### (4) 系统响应的经典方法的计算步骤

步骤一: 使用冲激匹配法或使用等效电路从  $0_-$  时刻初始条件和微分方程计算  $0_+$  时刻初始条件;

步骤二: 用特征方程计算响应中的特征函数, 并对全响应或零状态响应设定特解;

步骤三: 根据  $0_+$  时刻初始条件计算全响应、零输入响应或零状态响应中的待定系数, 代入所设解后, 得到所需的全响应、零输入响应或零状态响应。

需要说明的是, 上面给出了全响应、零输入响应和零状态响应的同时求解过程。上述计算的一个明显的简化是, 在求得零输入响应和零状态响应后, 可直接把它们相加, 从而得到系统全响应。另外, 如果仅要求计算其中某个或某些响应时, 应针对题意进行最简捷的计算。

从此例显见, 用经典技术进行系统时域分析的过程过于繁复, 不宜使用。后面, 我们将在 2.4 节介绍如何用卷积技术尤其是等效激励法进行系统时域分析。该方法要简单明了得多。

## 2.2 冲激响应的计算

### 1. 使用零状态线性概念计算系统冲激响应

首先, 我们用一个例子说明如何使用零状态线性概念计算系统的冲激响应。

**例2.4** 某 LTI 系统, 对激励  $f(t) = 2e^{-3t}u(t)$  的零状态响应是  $r(t) = T\{f(t)\}$ , 对激励  $f'(t)$  的零状态响应是  $T\{f'(t)\} = -3r(t) + e^{-2t}u(t)$ , 求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

**解** 由于  $f'(t) = -6e^{-3t}u(t) + 2\delta(t) = -3f(t) + 2\delta(t)$ , 根据零状态线性, 有

$$\begin{aligned} T\{f'(t)\} &= -3T\{f(t)\} + 2T\{\delta(t)\} = -3r(t) + 2h(t) \\ &= -3r(t) + e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

所以

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

下面介绍计算系统冲激响应的一般方法。

## 2. 规范化一阶系统冲激响应的计算

考虑规范化一阶系统

$$y'(t) + \alpha y(t) = f(t) \quad (2.18)$$

的冲激响应, 即该系统在零输入条件  $y(0_-) = 0$  下由激励  $f(t) = \delta(t)$  产生的零状态响应  $h(t)$ 。它满足方程  $h'(t) + \alpha h(t) = \delta(t)$ 。由于该系统的特征方程为  $\lambda + \alpha = 0$ , 特征根为  $\lambda = -\alpha$ , 因此容易验证, 该系统的冲激响应是

$$h(t) = e^{\lambda t}u(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad (2.19)$$

## 3. 规范化二阶系统冲激响应的计算

考虑规范化二阶系统

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad (2.20)$$

的冲激响应, 即该系统在零输入条件  $y(0_-) = 0$  和  $y'(0_-) = 0$  下由激励  $f(t) = \delta(t)$  产生的零状态响应  $h(t)$ 。它满足方程

$$h''(t) + bh'(t) + ch(t) = \delta(t) \quad (2.21)$$

由于该系统的特征方程为  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ , 特征根为  $\lambda_1, \lambda_2$ , 若设  $h_1(t) = e^{\lambda_1 t}u(t)$  是一阶系统  $h_1'(t) - \lambda_1 h_1(t) = \delta(t)$  的冲激响应, 则容易验证, 方程式(2.20)可简化为方程  $h'(t) - \lambda_2 h(t) = h_1(t)$ , 即  $h(t)$  是该方程表示的一阶系统在输入为  $h_1(t)$  时的零状态响应。由式(2.16)经计算易知, 其解是

$$\begin{aligned} h(t) &= h_2(t) * h_1(t) = (e^{\lambda_2 t}u(t)) * (e^{\lambda_1 t}u(t)) \\ &= \begin{cases} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ te^{\lambda_1 t} u(t) & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \quad (2.22) \end{aligned}$$

式中,  $h_2(t) = e^{\lambda_2 t}u(t)$  是一阶系统  $h_2'(t) - \lambda_2 h_2(t) = \delta(t)$  的冲激响应。式(2.22)利用了例2.7的结果。

当  $\lambda_1 = 0$  和  $\lambda_2 = \lambda$  时, 由式(2.22)可得

$$u(t) * (e^{\lambda t}u(t)) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\lambda t}}{-\lambda} u(t) & \lambda \neq 0 \\ tu(t) & \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

在求解二阶系统的响应或者在卷积计算中, 经常会用到式(2.22)和式(2.23)。

#### 4. 规范化 $n$ 阶系统冲激响应的计算

反复使用上面的论述, 可计算规范化  $n$  阶系统

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t) \quad (2.24)$$

的冲激响应

$$h(t) = h_n(t) * h_{n-1}(t) * \cdots * h_2(t) * h_1(t) \quad (2.25)$$

式中,  $h_n(t)$ ,  $h_{n-1}(t)$ ,  $\cdots$ ,  $h_2(t)$ ,  $h_1(t)$  是特征方程  $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$  的  $n$  个特征根所对应的特征信号。

#### 5. 一般的 $n$ 阶系统冲激响应的计算

一般的  $n$  阶系统可用微分方程表示为

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = x(t) \quad (2.26)$$

其中,  $x(t) = b_{n-m} f^{(m)}(t) + b_{n-m+1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} f'(t) + b_n f(t)$

通常,  $m \leq n$ 。当  $m < n$  时, 令  $b_0 = \cdots = b_{n-m-1} = 0$ , 则可统一地写为

$$x(t) = b_0 f^{(n)}(t) + b_1 f^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} f'(t) + b_n f(t) \quad (2.27)$$

不难看出, 式 (2.26) 表示了一个以  $x(t)$  为激励、以  $y(t)$  为响应的规范化  $n$  阶系统, 由式 (2.25) 可知, 该规范化  $n$  阶系统的冲激响应为

$$h_x(t) = h_n(t) * h_{n-1}(t) * \cdots * h_2(t) * h_1(t) \quad (2.28)$$

然后, 利用零状态线性与微分运算和加权运算的可交换性, 可知相应的以  $f(t)$  为激励、以  $y(t)$  为响应的原  $n$  阶系统的冲激响应为

$$h(t) = b_0 h_x^{(n)}(t) + b_1 h_x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} h'_x(t) + b_n h_x(t) \quad (2.29)$$

这样, 有一般  $n$  阶系统的冲激响应和阶跃响应计算方法:

步骤 1: 用式 (2.28) 计算相应的规范化系统的冲激响应  $h_x(t)$ ;

步骤 2: 用式 (2.29) 计算原系统的冲激响应  $h(t)$ ;

步骤 3: 如果还要计算阶跃响应, 则积分  $h(t)$  即可。

#### 6. 计算实例

**例 2.5** 一阶 RC 积分电路冲激响应的分析计算。

一阶 RC 积分电路如图 2.3 (a) 所示, 计算以电压源  $u_s(t)$  为激励信号, 以  $u_C(t)$  为响应信号的系统的冲激响应和阶跃响应。

**解** 由于

$$u_s(t) = Ri_C(t) + u_C(t) = RCu'_C(t) + u_C(t)$$

使得系统微分方程为

$$u'_C(t) + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{1}{RC} u_s(t)$$

则该系统的特征方程为  $\lambda + \frac{1}{RC} = 0$ ，特征根为  $\lambda = -\frac{1}{RC}$ ，相应的规范化系统的冲激响应为

$$h_x(t) = e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

把它代入系统微分方程式的右端后，得到原系统的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

将上式积分后就得出该系统的阶跃响应：

$$s(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t)$$

图 2.3 (b) 示出了该系统的阶跃响应波形。

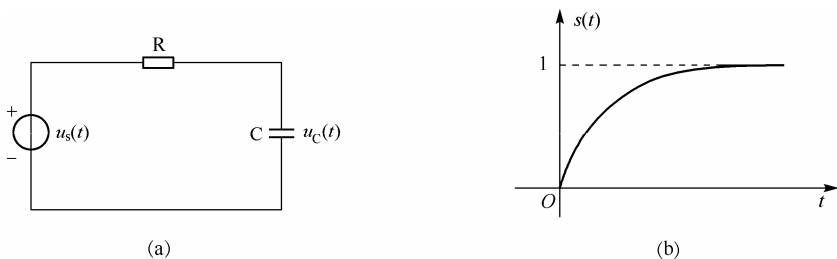


图 2.3 例 2.5 电路及阶跃响应

### 例 2.6 带加速电容的分压电路的分析计算。

带加速电容的分压电路如图 2.4 所示，计算以电压源  $u_s(t)$  为激励信号，以  $u_{C2}(t)$  为响应信号的系统的阶跃响应。

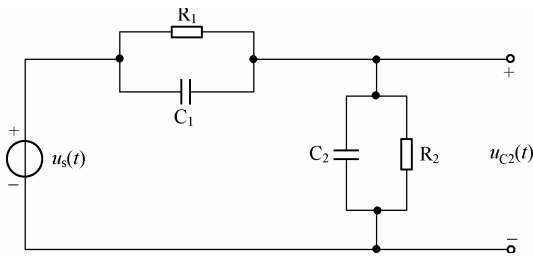


图 2.4 例 2.6 图

**解** 由下面的分析可看出，该电路虽有两个储能元件，却是个一阶系统。该电路原本是个电阻分压电路，但由于负载不可避免地并联有分布电容  $C_2$ ，造成分压偏离于理想效果。为补偿  $C_2$  的影响，特使用加速电容  $C_1$ ，于是有电路图 2.4。由图 2.4 可知

$$C_1 (u_s(t) - u_{C2}(t))' + \frac{u_s(t) - u_{C2}(t)}{R_1} = C_2 u_{C2}'(t) + \frac{u_{C2}(t)}{R_2}$$

整理后，可得系统微分方程

$$u_{C2}'(t) + \frac{1}{RC} u_{C2}(t) = k_C u_s'(t) + \frac{k_R}{RC} u_s(t)$$

其中, 总电容  $C = C_1 + C_2$ , 总电阻  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ , 电容分压比  $k_C = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ , 电阻分压比  $k_R = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ 。该系统的特征方程为  $\lambda + \frac{1}{RC} = 0$ , 特征根为  $\lambda = -\frac{1}{RC}$ , 相应的规范化系统的冲激响应为

$$h_x(t) = e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

将它代入系统微分方程式的右端后, 可得原系统的冲激响应为

$$h(t) = k_C h'_x(t) + \frac{k_R}{RC} h_x(t) = k_C \delta(t) + \frac{k_R - k_C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

上式积分后就得出原系统的阶跃响应:

$$s(t) = \left( k_R + (k_C - k_R) e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t)$$

电容分压比  $k_C$  和电阻分压比  $k_R$  之间的大小关系决定了电路的分压效果。当  $k_C > k_R$  时, 等效地, 当加速电容  $C_1$  过大使得  $R_1 C_1 > R_2 C_2$  时, 电路过补偿, 如图2.5(c)所示; 恰当选择加速电容  $C_1$  使得  $R_1 C_1 = R_2 C_2$  成立, 并进而使  $k_C = k_R$  成立时, 电路理想补偿, 如图2.5(b)所示, 此时电路理想分压; 当加速电容  $C_1$  过小使得  $R_1 C_1 < R_2 C_2$  成立, 并进而使  $k_C < k_R$  成立时, 电路欠补偿, 如图2.5(a)所示。

值得强调的是, 在理想补偿时, 电路的阶跃响应为  $s(t) = k_R u(t)$ , 并且冲激响应为  $h(t) = k_C \delta(t) = k_R \delta(t)$ , 该电路实际上是个理想的无延迟无失真传输系统。

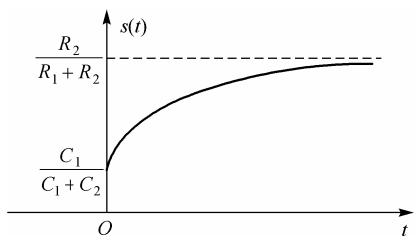
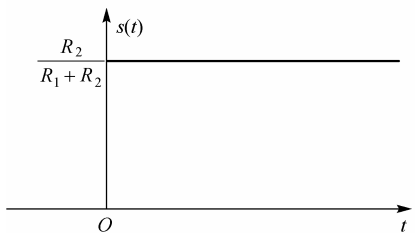
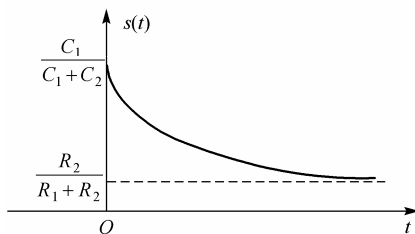
(a)  $R_2C_2 > R_1C_1$ (b)  $R_2C_2 = R_1C_1$ (c)  $R_2C_2 < R_1C_1$ 

图 2.5 带加速电容的分压电路的阶跃响应

## 2.3 卷积性质和计算

我们已经看到卷积计算在系统冲激响应计算中的核心作用，实际上，还将看到卷积计算在系统时域分析中的核心作用。

卷积计算的方法有解析法、图解法、利用性质法和变换法。本章介绍前三种方法，变换法将在第4章介绍。

### 2.3.1 卷积计算的解析法

由卷积的定义不难看出，对因果信号，因为有  $f(t) = f(t)u(t)$ ，所以两个因果信号的卷积计算可简化为

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= (f_1(t)u(t)) * (f_2(t)u(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau)u(t-\tau)f_2(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

即

$$(f_1(t)u(t)) * (f_2(t)u(t)) = u(t) \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \quad (2.30)$$

这样可用式(2.30)直接计算两个因果信号的卷积。

同理, 对于因果信号  $f_1(t) = f_1(t)u(t)$  和反因果信号  $f_2(t) = f_2(t)u(-t)$  的卷积, 有

$$\begin{aligned} (f_1(t)u(t)) * (f_2(t)u(-t)) &= \int_{\text{Max}\{0,t\}}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\text{Min}\{0,t\}} f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.31)$$

式中,  $\text{Max}\{0,t\}$  和  $\text{Min}\{0,t\}$  分别表示取 0 和  $t$  的最大值和最小值。

式(2.30)和式(2.31)可分别用于计算因果 LTI 系统的零状态响应和零输入响应。

利用卷积定义和冲激信号的抽样性质, 可知

$$f(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\delta(\tau-t_0)d\tau = f(t-t_0) \quad (2.32)$$

即延迟了的信号可表示为延迟了的冲激与信号的卷积。

**例 2.7** 计算  $(e^{\lambda_1 t}u(t)) * (e^{\lambda_2 t}u(t))$

**解** 由式(2.30)可知,

$$\begin{aligned} (e^{\lambda_1 t}u(t)) * (e^{\lambda_2 t}u(t)) &= u(t) \int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}e^{\lambda_2\tau}d\tau \\ &= u(t)e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{(\lambda_2-\lambda_1)\tau}d\tau \end{aligned}$$

于是,

$$(e^{\lambda_1 t}u(t)) * (e^{\lambda_2 t}u(t)) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ te^{\lambda t} u(t) & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases} \quad (2.33)$$

当两个信号中有一个为若干个延迟了的冲激信号的加权和时, 可用式(2.32)直接计算这两个信号的卷积:

$$f(t) * \sum_{i=1}^M w_i \delta(t-t_i) = \sum_{i=1}^M w_i f(t-t_i) \quad (2.34)$$

**例 2.8** 计算  $(\cos(\omega t)) * (\delta(t+1) - \delta(t-1))$

**解** 由式(2.34)可知

$$(\cos(\omega t)) * (\delta(t+1) - \delta(t-1)) = \cos(\omega(t+1)) - \cos(\omega(t-1))$$

当一个因果信号与一个有限长信号卷积时, 也可用解析法直接计算它们的卷积。

利用卷积与延迟的可交换性, 有  $f(t-a) * g(t-b) = y(t-a-b)$ , 式中,  $y(t) = f(t) * g(t)$ ,  $a$  和  $b$  为任意常数。

**例 2.9** 计算  $(e^{\lambda t}u(t)) * (u(t+1) - u(t-1))$

**解** 利用  $f(t-a) * g(t-b) = (f * g)(t-a-b)$  和式(2.23), 有

$$\begin{aligned}
 (e^{\lambda t} u(t)) * (u(t+1) - u(t-1)) &= (e^{\lambda t} u(t)) * u(t+1) - (e^{\lambda t} u(t)) * u(t-1) \\
 &= \frac{1}{-\lambda} \left[ (1 - e^{\lambda(t+1)}) u(t+1) - (1 - e^{\lambda(t-1)}) u(t-1) \right]
 \end{aligned}$$

### 2.3.2 卷积计算的图解法

由卷积的定义不难看出, 卷积计算包含了翻转、平移和加权积分三个过程。下面, 我们用图 2.5(a) 所示的信号  $e(t) = G_{-\frac{1}{2}, 1}(t)$  和图 2.5(b) 所示的信号  $h(t) = \frac{t}{2} G_{0, 2}(t)$  的卷积计算为例, 说明图解法的步骤。

步骤 1: 变量更换。把信号的时间变量  $t$  更换成  $\tau$ , 得  $e(\tau)$  和  $h(\tau)$ , 分别如图 2.6(a) 和图 2.6(b) 所示。

步骤 2: 翻转。把信号  $h(\tau)$  翻转成  $h(-\tau)$ , 如图 2.6(c) 所示。

步骤 3: 平移。把翻转后的信号  $h(-\tau)$  右移  $t$  (实际上, 当  $t > 0$  时, 才右移  $t$ , 当  $t < 0$  时, 则左移  $-t$ ), 得信号  $h(t - \tau)$ , 如图 2.6(d) 所示。

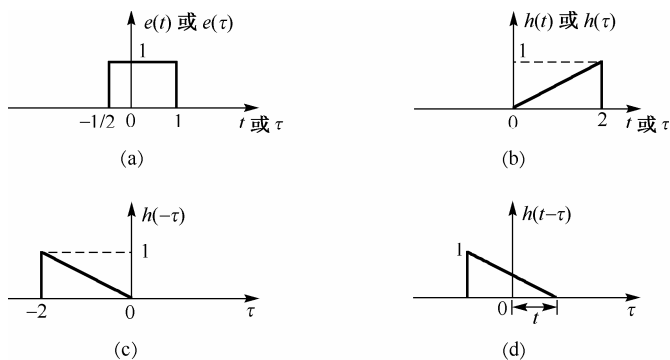


图 2.6 卷积计算的图解法

步骤 4: 加权积分。把信号  $h(t - \tau)$  用  $e(\tau)$  加权 (即把它们相乘) 后, 对时间变量  $\tau$  进行积分, 得到对特定的  $t$  而言的卷积值, 如图 2.7 所示。

必须对每个  $t$  逐点地进行上述过程, 而且要分段地处理各个时间区间。

对本例而言, 可分为如下多个时间区间:

(1) 当  $t \leq -\frac{1}{2}$  时, 如图 2.7(a) 所示, 由于两图形无重叠区间, 使得  $e(t) * h(t) = 0$ 。

(2) 当  $-\frac{1}{2} < t \leq 1$  时, 如图 2.7(b) 所示, 由于图形  $h(t - \tau)$  的前端与图形  $e(\tau)$  在区间  $[-\frac{1}{2}, t]$  重叠, 使得  $e(t) * h(t) = \frac{1}{4} \left( t + \frac{1}{2} \right)^2$ 。

(3) 当  $1 < t \leq \frac{3}{2}$  时, 如图 2.7(c) 所示, 由于图形  $h(t - \tau)$  的前端与图形  $e(\tau)$  在区间  $[-\frac{1}{2}, 1]$  重叠, 使得  $e_1(t) * h(t) = \frac{3}{4} \left( t - \frac{1}{4} \right)$ 。



(4) 当  $\frac{3}{2} < t < 3$  时, 如图 2.7(d) 所示, 由于图形  $h(t-\tau)$  的后端与图形  $e(\tau)$  在区间  $[t-2, 1]$

重叠, 使得  $e(t) * h(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$ 。

(5) 当  $t \geq 3$  时, 如图 2.7(e) 所示, 由于两图形再次无重叠区间, 使得  $e(t) * h(t) = 0$ 。

图 2.7(a)~(e) 中阴影的面积, 就是相乘积分的结果。最后, 以  $t$  为横坐标, 以与  $t$  对应的积分值绘成曲线, 就是卷积  $e(t) * h(t)$  的波形, 如图 2.7(f) 所示。

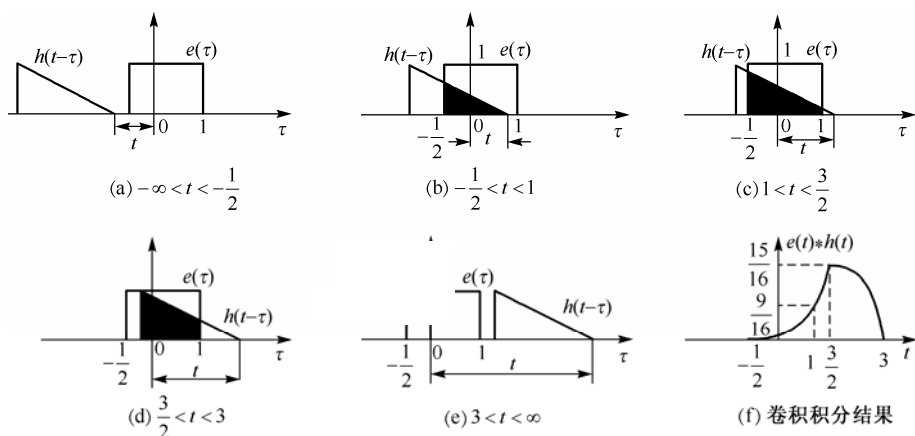


图 2.7  $G_{-0.5,1}(t)$  与  $0.5tG_{0,2}(t)$  卷积的结果

显然, 图解法较适宜于两个有限长信号 (尤其是有限长分段直线信号) 的卷积。另外, 当其中的一个信号为若干个延迟了的冲激信号的加权和时, 就更简便了。

**例 2.10** 用图解法计算  $f_1(t) * f_2(t)$ , 其中,  $f_1(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-1)$ , 如图 2.8(a) 所示,  $f_2(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + \delta(t-1)$ , 如图 2.8(b) 所示。

**解** 根据式 (2.34) 易知, 把如图 2.8(c) 所示的三个三角脉冲相加后, 可得到如图 2.8(d) 所示的最后结果。

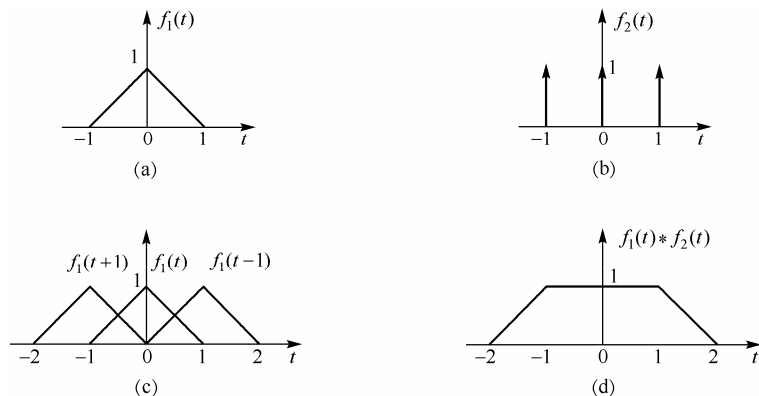


图 2.8 例 2.10 的图示

### 2.3.3 卷积的性质

作为一种数学运算, 卷积具有一些特殊性质, 这些性质在信号与系统的分析中有着重要

的作用,尤其是能简化信号的卷积计算和系统的分析与综合。

### 1. 代数性质

与乘法运算相同,卷积运算也服从交换律、分配律和结合律。

#### (1) 交换律

进行卷积的两个信号是可交换的,即

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2.35)$$

从卷积的定义式,通过用变量  $t - \lambda$  替换变量  $\tau$ , 不难直接证明该性质。

根据此性质可知,在 LTI 系统分析中,交换系统的激励信号和系统的冲激响应后仍能得到同一响应,因为 LTI 系统的响应是系统激励与系统冲激响应的卷积,如图 2.9(a) 所示。

另外,根据此性质可知,在 LTI 系统实现中,对串联的两个系统而言,它们的串联次序是可交换的,因为由两个子系统串联而成的系统冲激响应是这两个子系统的冲激响应的卷积,如图 2.9(b) 所示。

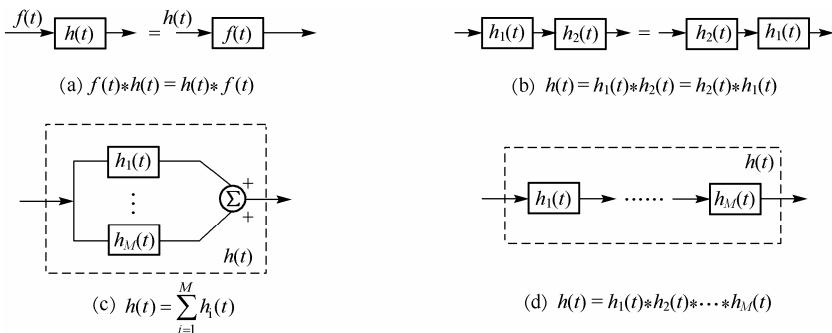


图 2.9 串并联系统的冲激响应计算

#### (2) 分配律

进行卷积的两个信号对加法运算是可分配的,即

$$f_1(t) * (f_{21}(t) + f_{22}(t)) = f_1(t) * f_{21}(t) + f_1(t) * f_{22}(t) \quad (2.36)$$

该性质说明,卷积运算与加法运算可交换。它也不难由卷积的定义式直接得到。

根据该性质可知,在 LTI 系统实现中,当其冲激响应信号可分解为  $M$  个 ( $M \geq 2$ ) 较简单的冲激响应分量信号之和时,即当  $h(t) = \sum_{i=1}^M h_i(t)$ ,  $M \geq 2$  时,该系统可用  $M$  个较简单的子系统的并联实现,因为由  $M$  个子系统并联而成的系统的冲激响应是这  $M$  个子系统的冲激响应之和,如图 2.9(c) 所示。

(3) 结合律 三个信号的卷积计算与计算次序无关,即先计算哪两个信号的卷积,然后再计算与剩下的信号卷积,对计算结果无影响,即

$$f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) = (f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) \quad (2.37)$$

由于式 (2.37) 左右两端都隐含了一个二重积分,它们的差异仅在于积分次序不同,因此很容易通过改变积分次序来证明该性质。

根据此性质可知, 当 LTI 系统的冲激响应信号可分解为  $M$  个 ( $M \geq 2$ ) 较简单的冲激响应分量信号之卷积时, 即  $h(t) = h_M(t) * h_{M-1}(t) * \cdots * h_2(t) * h_1(t)$  时, 该系统可用  $M$  个较简单的子系统的串联实现, 因为由  $M$  个子系统串联而成的系统的冲激响应是这  $M$  个子系统的冲激响应之卷积, 如图 2.9(d) 所示。并且, 由交换律可知, 它们的串联次序对实现结果无影响。

**例 2.11** 图 2.10 所示系统由四个子系统组成, 各子系统的冲激响应分别为积分器  $h_1(t) = u(t)$ 、单位延迟器  $h_2(t) = \delta(t-1)$  和倒相器  $h_3(t) = -\delta(t)$ , 求总系统的冲激响应  $h(t)$ 。

**解** 根据系统串并联时冲激响应的运算规则, 有

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) + h_2(t) * h_1(t) * h_3(t) \\ &= u(t) + \delta(t-1) * u(t) * [-\delta(t)] = u(t) - u(t-1) \end{aligned}$$

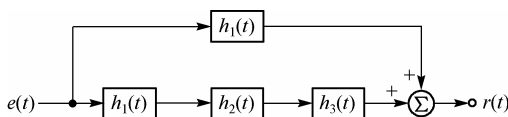


图 2.10 例 2.11 的图示

## 2. 微积分性质

需要特别注意的是, 卷积运算的微积分性质与乘法运算有明显的差别。

### (1) 微分性质

两个信号卷积后的导数等于其中之一的信号导数与另一信号的卷积, 即

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2.38)$$

该性质说明, 卷积运算与微分运算可交换, 这等价于说明, 由于微分器是一个 LTI 系统, 因此它与执行卷积运算的 LTI 系统的串联次序是可交换的。

由卷积定义可证明该性质。先证第一个等式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_1(t-\tau)}{dt} f_2(\tau) d\tau = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) \end{aligned}$$

同理, 可证式 (2.38) 的后一等式成立。

**例 2.12** 计算 (a)  $(1-e^{-2t})u(t) * \delta'(t) * u(t)$ , (b)  $te^{-2t}u(t) * \frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$ 。

$$\begin{aligned} \text{解 (a)} \quad & (1-e^{-2t})u(t) * \delta'(t) * u(t) = (1-e^{-2t})u(t) * \delta(t) * u'(t) \\ & = (1-e^{-2t})u(t) * \delta(t) * \delta(t) = (1-e^{-2t})u(t) \\ \text{(b)} \quad & te^{-2t}u(t) * \frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)] = te^{-2t}u(t) * \frac{d}{dt}[\delta(t)] = \frac{d}{dt}[te^{-2t}u(t)] * \delta(t) \\ & = \frac{d}{dt}[te^{-2t}u(t)] = (1-2t)e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

### (2) 积分性质

两个信号卷积后的积分等于其中之一的信号的积分与另一信号的卷积, 即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [f_1(\tau) * f_2(\tau)] d\tau &= \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau * f_2(t) \\ &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (2.39)$$

该性质说明, 卷积运算与积分运算可交换, 这等价于说明, 由于积分器是一个 LTI 系统, 因此它与执行卷积运算的 LTI 系统的串联次序是可交换的。

证明如下: 由卷积定义可证明该性质。先证第一个等式:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [f_1(\tau) * f_2(\tau)] d\tau &= \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\tau - \lambda) d\tau \right] f_2(\lambda) d\lambda\end{aligned}$$

使用变量替换  $x = \tau - \lambda$  后, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^t [f_1(\tau) * f_2(\tau)] d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{t-\lambda} f_1(x) dx \right] f_2(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau * f_2(t)\end{aligned}$$

利用卷积的可交换性, 可证式 (2.39) 的后一等式成立。

应用类似的推演, 可得到卷积的高阶导数和多重积分的运算规律, 如下所述。

如果设

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$\text{则有} \quad f^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t) \quad (2.40)$$

这里,  $n, m$  取整数, 其中取正整数时为导数次数, 取负整数时为积分次数。

最常遇到的情况是  $n=0, m=1$  的特殊情况, 此时

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

### 3. 信号与冲激信号或阶跃信号的卷积

#### (1) 信号与冲激信号的卷积

由式 (2.32) 可知, 信号与延迟了的冲激信号的卷积等于延迟了的信号。

#### (2) 信号与阶跃信号的卷积

根据卷积的积分性质, 对式 (2.32) 积分后, 有

$$\begin{aligned}f(t) * u(t - t_0) &= f(t) * \delta^{(-1)}(t - t_0) = (f(t) * \delta(t - t_0))^{(-1)} \\ &= f^{(-1)}(t - t_0)\end{aligned}\quad (2.42)$$

这表明, 任何信号与阶跃函数的卷积等于该信号的积分。

#### (3) 信号与冲激偶(即冲激函数的导数)的卷积

根据卷积的微分性质, 对式 (2.32) 微分后, 有

$$f(t) * \delta'(t - t_0) = (f(t) * \delta(t - t_0))' = f'(t - t_0) \quad (2.43)$$

这表明,任何信号与冲激偶的卷积等于该信号的微分。

#### (4) 信号与冲激的 $m$ 阶导数的卷积

推广前述论断,对于一般的情况( $m$ 取正整数时为微分,取负整数时为积分),有

$$f(t) * \delta^{(m)}(t - t_0) = f^{(m)}(t - t_0) \quad (2.44)$$

这表明,任何信号与冲激的 $m$ 阶导数的卷积等于该信号的 $m$ 阶导数。

### 2.3.4 卷积计算的性质法

在用解析法或图解法计算卷积的过程中,如果能恰当地利用卷积性质,尤其是利用式(2.41)及式(2.34),就可有效地简化卷积计算。下面用几例示之。

**例 2.13** 计算矩形脉冲  $f(t) = G_\tau(t)$  的自卷积。

**解** 根据卷积的微积分性质,有

$$\begin{aligned} f(t) * f(t) &= f'(t) * f^{(-1)}(t) = \left[ \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] * \left[ r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \\ &= [r(t + \tau) - r(t)] - [r(t) - r(t - \tau)] = r(t + \tau) - 2r(t) + r(t - \tau) \end{aligned}$$

也可在图解法中结合卷积性质解本题。图 2.11 (a) 和 (b) 示出了矩形脉冲信号, 图 2.11 (c) 和 (d) 分别示出了矩形脉冲信号的导数和积分信号, 图 2.11 (e) 示出了图 2.11 (c) 和 (d) 所示信号的卷积结果, 它就是矩形脉冲自卷积后得到的宽度加倍了的三角脉冲信号。

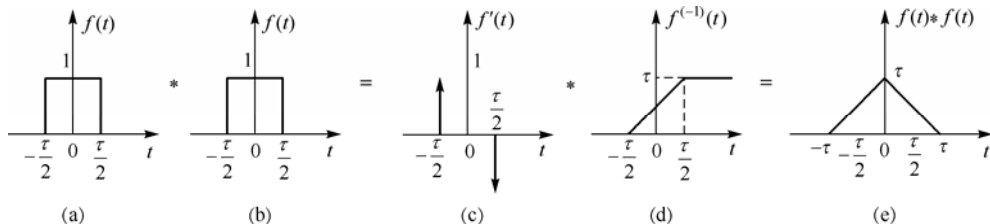


图 2.11 例 2.13 的图示

**例 2.14** 计算矩形脉冲  $f_1(t) = u(t+1) - u(t-1)$  与指数信号  $f_2(t) = 2e^{-2t}u(t)$  的卷积。

**解** 对于本例, 有

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t) = [\delta(t+1) - \delta(t-1)] * [(1 - e^{-2t})u(t)] \\ &= (1 - e^{-2(t+1)})u(t+1) - (1 - e^{-2(t-1)})u(t-1) \end{aligned}$$

图 2.11 (a) 和 (b) 分别示出了  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 图 2.11 (c) 和 (d) 分别示出了  $f_1(t)$  的导数信号  $f_1'(t)$  和  $f_2(t)$  的积分信号  $f_2^{(-1)}(t)$ , (e) 示出了图 2.11 (c) 和 (d) 所示信号的卷积结果, 这就是所需的卷积信号  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

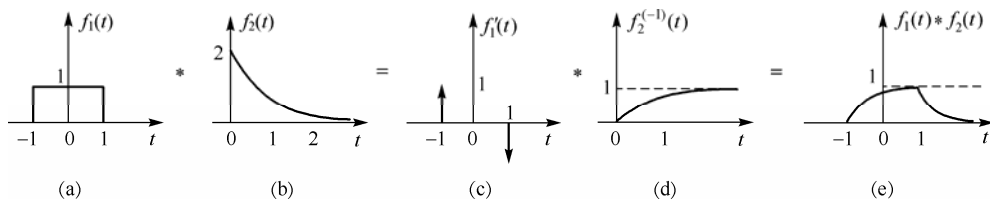


图 2.12 例 2.14 的图示

**例 2.15** 计算  $e(t) * h(t)$ , 其中  $e(t) = G_{-\frac{1}{2}, 1}(t)$  和  $h(t) = \frac{t}{2} G_{0, 2}(t)$ 。

**解** 因为  $h^{(-1)}(t) = \frac{t^2}{4} G_{0, 2}(t) + u(t-2)$  和  $e'(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta(t-1)$ , 所以

$$\begin{aligned} e(t) * h(t) &= e'(t) * h^{(-1)}(t) = h^{(-1)}\left(t + \frac{1}{2}\right) - h^{(-1)}(t-1) \\ &= \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 G_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(t) + u\left(t - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}(t-1)^2 G_{1, 3}(t) - u(t-3) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 & -\frac{1}{2} \leq t < 1 \\ \frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(t-1)^2 = \frac{3}{4}\left(t - \frac{1}{4}\right) & 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{1}{4}(t-1)^2 & \frac{3}{2} \leq t < 3 \\ 0 & t \text{ 为其他值} \end{cases} \end{aligned}$$

其波形如图 2.7(f) 所示。

## 2.4 应用于时域分析的卷积技术

### 2.4.1 应用于非因果信号激励时的时域分析的卷积法

在 2.2 节中, 已讨论了如何用卷积技术计算 LTI 系统的冲激响应和阶跃响应, 本小节要讨论如何用卷积技术计算非因果信号激励时的 LTI 系统的零状态响应、零输入响应和全响应。

式 (2.17) 表明, LTI 系统的零状态响应就是系统在零状态条件下对  $f_+(t)$  的响应, 而其零输入响应就是系统在零状态条件下对  $f_-(t)$  响应的因果分量。式 (2.17) 可用来计算已知  $f_+(t)$  和  $f_-(t)$  时的 LTI 系统时域分析 (包括冲激响应、零状态响应、零输入响应和全响应等的计算), 它由冲激响应计算和卷积计算组成, 其具体步骤如下:

步骤 1: 用式 (2.28) 计算相应的规范化系统的冲激响应  $h_x(t)$ ;

步骤 2: 用式 (2.29) 计算原系统的冲激响应  $h(t)$ ;

步骤 3: 用式 (2.17) 计算原系统的零状态响应  $y_{zs}(t)$ 、零输入响应  $y_{zi}(t)$  和全响应  $y(t)$  [如果要计算系统阶跃响应, 则积分  $h(t)$  即可]。

**例 2.16** 用卷积法计算图 2.1 所示电路的以  $i(t)$  为响应的冲激响应、阶跃响应、零状态响应、零输入响应和全响应。

**解** 该电路的零状态等效电路如图 2.2(b) 所示, 对它分析可知

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$$

由式(2.22)计算相应规范化系统的冲激响应

$$h_x(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-5t}}{3} u(t)$$

把它代入式(2.29)后, 得原系统的冲激响应为

$$h(t) = h_x''(t) + 6h_x'(t) + 4h_x(t) = \delta(t) + \frac{1}{3}(e^{-5t} - 4e^{-2t})u(t)$$

上式积分后就得出原系统的阶跃响应

$$s(t) = \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \right) u(t)$$

由于  $e_+(t) = 4u(t)$ , 由零状态线性可知系统的零状态响应为

$$i_{zs}(t) = 4s(t) = 4 \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{2}{3}e^{-2t} \right) u(t)$$

由式(2.31)可知, 输入的反因果分量  $e_-(t) = 2u(-t) = 2 - 2u(t)$  产生的系统零输入响应为

$$\begin{aligned} i_{zi}(t) &= 2u(t) \left[ \int_0^{+\infty} h(\tau) d\tau - s(t) \right] = 2u(t) [s(\infty) - s(t)] \\ &= 2 \left( \frac{1}{15}e^{-5t} - \frac{2}{3}e^{-2t} \right) u(t) \end{aligned}$$

这样, 系统的全响应为

$$i(t) = i_{zs}(t) + i_{zi}(t) = \left( \frac{8}{5} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{4}{3}e^{-2t} \right) u(t)$$

结果与节 2.1.2 完全相同, 但这里的计算要简单明了不少。

## 2.4.2 基于因果微分定理的系统时域分析卷积法

利用函数乘积的微分性质, 容易证明下述的因果微分定理:

$$[y'(t)]_+ = [y_+(t)]' - y(0_-)\delta(t) \quad (2.45)$$

其中  $y_+(t) = y(t)u(t)$ ,  $[y'(t)]_+ = y'(t)u(t)$ 。

**推论:**

$$(1) [y''(t)]_+ = [y_+(t)]'' - y(0_-)\delta'(t) - y'(0_-)\delta(t) \quad (2.46)$$

$$(2) [y^{(n)}(t)]_+ = [y_+(t)]^{(n)} - y(0_-)\delta^{(n-1)}(t) - y'(0_-)\delta^{(n-2)}(t) - \cdots - y^{(n-1)}(0_-)\delta(t) \quad (2.47)$$

因果微分定理及其推论表明了信号各阶导数的因果分量与信号因果分量的各阶导数之间的关系: 它们之差与初始条件有关。

## 1. 因果输入激励时的系统时域分析

描述 LTI 系统的微分方程一般表示为

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) \\ & = b_0 f^{(n)}(t) + b_1 f^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} f'(t) + b_n f(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

当系统激励为因果信号时, 利用因果微分定理及其推论, 可以把  $0_-$  时刻初始条件下的零输入微分方程转化为对应规范系统在零初始条件和等效激励下的微分方程:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = x_{zi}(t) \quad (2.49)$$

其中, 零输入时的等效激励(简称等效零输入激励)为

$$x_{zi}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0_-) \delta^{(n-1-k)}(t) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} y^{(k)}(0_-) \delta^{(n-2-k)}(t) + \cdots + a_{n-1} y(0_-) \delta(t) \quad (2.50)$$

这里, 利用了激励的因果性使得  $f^{(i)}(0_-) \equiv 0$  ( $i = 0, 1, \cdots, n-1$ ) 的事实。

同样地, 可以把零初始条件和因果输入激励下的微分方程转化为对应规范系统在零初始条件和等效激励下的微分方程:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = x_{zs}(t) \quad (2.51)$$

其中, 零状态时的等效激励(简称等效零状态激励)为

$$x_{zs}(t) = b_0 f_+^{(n)}(t) + b_1 f_+^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} f_+'(t) + b_n f_+(t) \quad (2.52)$$

此时,  $f_+(t) = f(t)$ 。

于是, 有如下所述的用卷积分析已知  $0_-$  时刻初始条件和因果输入激励时的 LTI 系统响应的等效激励法:

步骤1: 用式(2.28)计算该规范系统冲激响应  $h_x(t)$ ;

步骤2: 用式(2.52)计算等效零状态激励  $x_{zs}(t)$ , 并计算  $h_x(t)$  与等效零状态激励  $x_{zs}(t)$  的卷积, 就得到系统的零状态响应;

步骤3: 用式(2.50)计算等效零输入激励  $x_{zi}(t)$ , 并计算  $h_x(t)$  与等效零输入激励  $x_{zi}(t)$  的卷积, 就得到系统的零输入响应。

## 2. 非因果输入激励时的系统时域分析

对于非因果输入激励的 LTI 系统, 等效零状态激励仍由式(2.52)给出, 此时  $f_+(t) = f(t)u(t)$ , 但根据因果微分定理, 需把等效零输入激励修改为:

$$\begin{aligned} x_{zi}(t) = & \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0_-) \delta^{(n-1-k)}(t) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} y^{(k)}(0_-) \delta^{(n-2-k)}(t) + \cdots + a_{n-1} y(0_-) \delta(t) - \\ & \left[ b_0 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0_-) \delta^{(n-1-k)}(t) + b_1 \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0_-) \delta^{(n-2-k)}(t) + \cdots + b_{n-1} f(0_-) \delta(t) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

于是有如下所述的用卷积分析已知非因果输入激励时的 LTI 系统响应的等效激励法:

步骤1: 用式(2.28)计算该规范系统冲激响应  $h_x(t)$ ;

步骤2: 用式(2.52)计算等效零状态激励  $x_{zs}(t)$ , 并计算  $h_x(t)$  与等效零状态激励  $x_{zs}(t)$  的



卷积, 就得到系统的零状态响应;

步骤3: 根据微分方程计算  $0_-$  时刻的输入/输出初始条件, 然后使用式 (2.53), 计算等效零输入激励  $x_{zi}(t)$ , 并计算  $h_x(t)$  与等效零输入激励  $x_{zi}(t)$  的卷积, 就得到系统的零输入响应。

### 3. 系统时域分析的等效激励法

总之, 系统零输入响应、零状态响应和全响应分别等于规范系统冲激响应  $h_x(t)$  与等效零输入激励  $x_{zi}(t)$ 、等效零状态激励  $x_{zs}(t)$  和等效全激励  $x(t)$  的卷积, 即

$$\begin{cases} y_{zi}(t) = h_x(t) * x_{zi}(t) \\ y_{zs}(t) = h_x(t) * x_{zs}(t) \\ y(t) = h_x(t) * x(t) \end{cases} \quad \text{其中 } x(t) = x_{zi}(t) + x_{zs}(t) \quad (2.54)$$

根据上述讨论, 可把 LTI 系统等效为等效激励形成器与规范化系统的级联, 如图2.13 所示。其中, 由  $0_-$  或  $0_+$  时刻的初始条件和冲激信号及其各阶导数共同形成等效零输入激励, 由输入信号的因果分量及其各阶导数形成等效零状态激励, 等效零输入激励与等效零状态激励之和形成等效全激励。

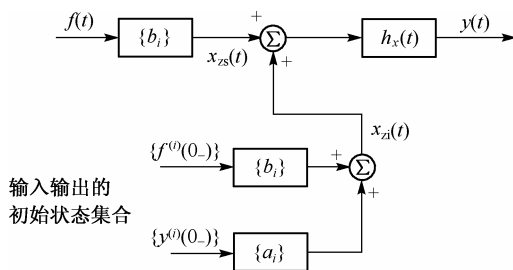


图 2.13 LTI 系统的等效框图

一般地, 等效零输入激励与系数  $\{a_i\}$  和系数  $\{b_i\}$  都有关, 而等效零状态激励仅与系数  $\{b_i\}$  有关。

### 4. 系统时域分析举例

下面首先用一例说明计算因果输入激励下的 LTI 系统响应的过程。

**例 2.17** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$ , 其中  $f(t) = e^{-2t}u(t)$ , 求系统在初始条件为  $y(0_-) = 1$  和  $y'(0_-) = 1$  时的零输入响应、零状态响应和全响应。

**解** 微分方程对  $t > 0$  成立, 故有

$$[y''(t)]_+ + 4[y'(t)]_+ + 3[y(t)]_+ = f(t)$$

利用因果微分定理及其推论, 有

$$[y_+(t)]'' - y(0_-)\delta'(t) - y'(0_-)\delta(t) + 4[y_+(t)]' - 4y(0_-)\delta(t) + 3y_+(t) = f(t)$$

可得等效零输入激励为

$$x_{zi}(t) = y(0_-)\delta'(t) + [y'(0_-) + 4y(0_-)]\delta(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

等效零状态激励为

$$x_{zs}(t) = f(t) = e^{-2t}u(t)$$

容易求得对应的规范系统冲激响应为

$$h_x(t) = e^{-t}u(t) * e^{-3t}u(t) = \frac{1}{2}[e^{-t} - e^{-3t}]u(t)$$

可得系统零输入响应、零状态响应和全响应分别为

$$y_{zi}(t) = h_x(t) * x_{zi}(t) = h'_x(t) + 5h_x(t) = [2e^{-t} - e^{-3t}]u(t)$$

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= h_x(t) * x_{zs}(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t) * e^{-2t}u(t) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \frac{1}{2}(5e^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

然后, 用一例说明用等效激励法计算非因果输入激励下的 LTI 系统响应的过程。

**例 2.18** 已知图 2.1 所示电路的以  $i(t)$  为响应的微分方程为  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$ , 非因果输入为  $e(t) = 2u(-t) + 4u(t)$ , 用基于因果微分定理的卷积技术计算其零输入响应、零状态响应和全响应。

**解** 由微分方程可知, 初始条件为  $i(0_-) = 0.8 \text{ A}$ ,  $i'(0_-) = 0 \text{ A/s}$ ,  $e(0_-) = 2 \text{ V}$  和  $e'(0_-) = 0 \text{ V/s}$ , 对应的规范系统的冲激响应为

$$h_x(t) = e^{-2t}u(t) * e^{-5t}u(t) = \frac{e^{-2t} - e^{-5t}}{3}u(t)$$

可得

$$h'_x(t) = \frac{-2e^{-2t} + 5e^{-5t}}{3}u(t)$$

和

$$\begin{aligned} h_x^{(-1)}(t) &= h_x(t) * u(t) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1 - e^{-2t}}{2} - \frac{1 - e^{-5t}}{5} \right] u(t) \\ &= \left( \frac{1}{10} - \frac{e^{-2t}}{6} + \frac{e^{-5t}}{15} \right) u(t) \end{aligned}$$

考虑到  $e_+(t) = 4u(t)$ , 由式 (2.53) 和式 (2.52) 可知, 等效零输入激励和等效零状态激励分别为

$$\begin{aligned} x_{zi}(t) &= i(0_-)\delta'(t) + i'(0_-)\delta(t) + 7i(0_-)\delta(t) - [e(0_-)\delta'(t) + e'(0_-)\delta(t) + 6e(0_-)\delta(t)] \\ &= -\frac{2}{5}[3\delta'(t) + 16\delta(t)] \end{aligned}$$

和

$$x_{zs}(t) = e_+''(t) + 6e_+'(t) + 4e_+(t) = 4[\delta'(t) + 6\delta(t) + 4u(t)]$$

则其零输入响应、零状态响应和全响应分别为

$$\begin{aligned} i_{zi}(t) &= x_{zi}(t) * h_x(t) = -\frac{2}{5}(3h'_x(t) + 16h_x(t)) \\ &= \left( \frac{2}{15}e^{-5t} - \frac{4}{3}e^{-2t} \right) u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{zs}(t) &= h_x(t) * x_{zs}(t) = 4 \left( h'_x(t) + 6h_x(t) + 4x^{(-1)}(t) \right) \\ &= \left( \frac{8}{5} + \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} \right) u(t) \end{aligned}$$

和

$$i(t) = i_{zs}(t) + i_{zi}(t) = \left( \frac{8}{5} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{4}{3}e^{-2t} \right) u(t)$$

这与前述结果完全一致，而且计算过程简单得多。

需要特别指出的是，也可以用  $0_+$  时刻初始条件计算等效零输入激励，此时只需把式 (2.53) 中的所有  $0_-$  改为  $0_+$  即可，即

$$\begin{aligned} x_{zi}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0_+) \delta^{(n-1-k)}(t) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} y^{(k)}(0_+) \delta^{(n-2-k)}(t) + \cdots + a_{n-1} y(0_+) \delta(t) - \\ &\quad \left[ b_0 \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0_+) \delta^{(n-1-k)}(t) + b_1 \sum_{k=0}^{n-2} f^{(k)}(0_+) \delta^{(n-2-k)}(t) + \cdots + b_l f(0_+) \delta(t) \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

### 2.4.3 基于因果微分定理从 $0_-$ 时刻初始条件计算 $0_+$ 时刻初始条件

显然，分别在  $0_-$  时刻使用式 (2.53) 和在  $0_+$  时刻使用式 (2.55) 计算等效零输入激励时，应得到同一个等效零输入激励。这样就可利用这两个式子的冲激函数及其导数的对应项系数相等的原理，从已知的  $0_-$  时刻初始条件得到  $0_+$  时刻初始条件。

具体地，把两式相减，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{k=0}^{n-1-i} \Delta y^{(k)} \delta^{(n-1-i-k)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \sum_{k=0}^{n-1-i} \Delta f^{(k)} \delta^{(n-1-i-k)}(t) \quad (2.56)$$

其中，输入状态跳变和输出状态跳变分别为

$$\Delta f^{(k)} \triangleq f^{(k)}(0_+) - f^{(k)}(0_-) \quad \text{和} \quad \Delta y^{(k)} \triangleq y^{(k)}(0_+) - y^{(k)}(0_-) \quad (2.57)$$

为了使用  $0_-$  状态和  $0_+$  状态表达的等效零输入激励中的冲激函数及其各阶导数的系数相等，应有

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & 1 & \cdots & a_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y^{(n-1)} \\ \Delta y^{(n-2)} \\ \vdots \\ \Delta y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ & b_0 & \cdots & b_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f^{(n-1)} \\ \Delta f^{(n-2)} \\ \vdots \\ \Delta f^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

它表示了输入状态跳变引起的输出状态跳变。这表达了冲激匹配的本质——为了使用  $0_-$  和  $0_+$  两个时刻的初始条件能得到同一个等效零输入激励，应使得用  $0_-$  状态和  $0_+$  状态表达的等效零输入激励中的冲激函数及其各阶导数的系数相等，即相匹配。这给出了冲激匹配法的物理意义。

由式 (2.58) 可递归地解出输出状态跳变，并进而求出输出在  $0_+$  时刻的状态。实际上，

$$\Delta y = \Delta f \quad \text{和} \quad \Delta y^{(i)} = - \sum_{k=1}^i a_k \Delta y^{(i-k)} + \sum_{k=0}^i b_k \Delta f^{(i-k)} \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \quad (2.59)$$

总之,有如下所述的用等效零输入激励匹配技术计算  $0_-$  到  $0_+$  的状态跳变的算法:

步骤 1: 计算输入状态跳变: 对于  $i=0, 1, \dots, n-1$ ,  $\Delta f^{(i)} = f^{(i)}(0_+) - f^{(i)}(0_-)$ ;

步骤 2: 用式 (2.59) 递归地计算输出状态跳变;

步骤 3: 计算  $0_+$  时刻的输出状态: 对于  $i=0, 1, \dots, n-1$ ,  $y^{(i)}(0_+) = y^{(i)}(0_-) + \Delta y^{(i)}$ 。

下面仍用图 2.1 所示的电路来说明此计算过程。

由式 (2.58) 和系统微分方程可知,  $\Delta i = \Delta e$  使得  $i(0_+) = i(0_-) + \Delta e$ ,  $\Delta i' = -7\Delta i + \Delta e' + 6\Delta e = \Delta e' - \Delta e$  使得  $i'(0_+) = i'(0_-) + \Delta e' - \Delta e$ , 其中  $\Delta i = i(0_+) - i(0_-)$ ,  $\Delta e = e(0_+) - e(0_-)$ ,  $\Delta i' = i'(0_+) - i'(0_-)$  和  $\Delta e' = e'(0_+) - e'(0_-)$ 。

总之,  $i(0_+) = i(0_-) + \Delta e$  和  $i'(0_+) = i'(0_-) + \Delta e' - \Delta e$

对于全响应计算, 输入  $e(t) = 2u(-t) + 4u(t)$ 。这样,  $e(0_+) = 4$  和  $e(0_-) = 2$  使得  $\Delta e = 2$ ,  $e'(0_+) = 0$  和  $e'(0_-) = 0$  使得  $\Delta e' = 0$ , 因此,  $\Delta i = 2$  和  $\Delta i' = -2$ 。这样, 从它们和已知的  $0_-$  时刻初始条件  $i(0_-) = 0.8$  和  $i'(0_-) = 0$ , 有  $i(0_+) = 0.8 + 2 = 2.8$  和  $i'(0_+) = 0 - 2 = -2$ 。

对于零输入响应计算, 输入  $e(t) = 2u(-t)$ 。这样,  $e(0_+) = 0$  和  $e(0_-) = 2$  使得  $\Delta e = -2$ ;  $e'(0_+) = 0$  和  $e'(0_-) = 0$  使得  $\Delta e' = 0$ ; 因此,  $\Delta i = -2$  和  $\Delta i' = 2$ 。这样, 从它们和已知的  $0_-$  时刻初始条件  $i(0_-) = 0.8$  和  $i'(0_-) = 0$ , 有  $i_{zi}(0_+) = 0.8 - 2 = -1.2$  和  $i'_{zi}(0_+) = 0 + 2 = 2$ 。

对于零状态响应计算, 输入  $e(t) = 4u(t)$ 。这样,  $e(0_+) = 4$  和  $e(0_-) = 0$  使得  $\Delta e = 4$ ,  $e'(0_+) = 0$  和  $e'(0_-) = 0$  使得  $\Delta e' = 0$ , 因此,  $\Delta i = 4$  和  $\Delta i' = -4$ 。这样, 从它们和已知的  $0_-$  时刻初始条件  $i(0_-) = 0$  和  $i'(0_-) = 0$ , 有  $i_{zs}(0_+) = 0 + 4 = 4$  和  $i'_{zs}(0_+) = 0 - 4 = -4$ 。

可见, 它们与用等效电路或用冲激匹配法计算出的结果 (参见表 2.1) 完全相同。

## 2.4.4 已知 $0_+$ 时刻初始条件时的系统时域分析卷积法

2.4.3 节的分析也表明了, 借助于式 (2.53), 从  $0_-$  时刻的初始条件计算等效零输入激励的过程等同于借助于式 (2.55), 从  $0_+$  时刻的初始条件  $[i(0_+) = -1.2 \text{ A}$  和  $i'(0_+) = 2 \text{ A/s}]$  计算等效零输入激励的过程。这样, 对图 2.1 所示电路的系统, 有

$$x_{zi}(t) = i(0_+)\delta'(t) + i'(0_+)\delta(t) + 7i(0_+)\delta(t) = -\frac{2}{5}[3\delta'(t) + 16\delta(t)]$$

可见, 已知  $0_+$  时刻的初始条件的时域分析与已知  $0_-$  时刻的初始条件的时域分析的差异仅在于等效零输入激励的计算。

**例 2.19** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}u(t)$ , 已知  $y(0_+) = 1$  和  $y'(0_+) = 1$ , 求系统的零输入响应、零状态响应、全响应、自由响应和强迫响应。

**解** 对应规范系统的冲激响应为

$$h_x(t) = e^{-t}u(t) * e^{-2t}u(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

其导函数为

$$h'_x(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

等效零输入激励为

$$x_{zi}(t) = y(0_+) \delta'(t) + y'(0_+) \delta(t) + 3y(0_+) \delta(t) = \delta'(t) + 4\delta(t)$$

使得零输入响应为

$$y_{zi}(t) = x_{zi}(t) * h_x(t) = h'_x(t) + 4h_x(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= x_{zs}(t) * h_x(t) = e^{-t}u(t) * (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \\ &= ((t-1)e^{-t} + e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

全响应为

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = ((t+2)e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

自由响应为

$$y_{\text{free}}(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

强迫响应为

$$y_{\text{force}}(t) = te^{-t}u(t)$$

## 2.4.5 零输入响应的两种定义的等效性\*

式(2.54)的第一式和式(2.17)的第二式分别给出了零输入响应的两种定义和计算方法。本节从理论上证明它们是等价的。

把系统微分方程简写为

$$y(t) * A(t) = x(t) = f(t) * B(t) \quad t > 0 \quad (2.60)$$

式中,  $x(t)$  为系统对应的规范化系统的激励, 并且

$$A(t) = \sum_{i=0}^n a_i \delta^{(n-i)}(t) \quad (2.61)$$

和

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i \delta^{(n-i)}(t) \quad (2.62)$$

于是, 有

$$h_x(t) * A(t) = \delta(t) \quad (2.63)$$

和

$$h_x(t) * B(t) = h(t) \quad (2.64)$$

这使得式(2.17)的第二式可改写为

$$r_{zi}(t) = u(t) [h_x(t) * B(t) * f_-(t)] \quad (2.65)$$

式中,  $f_-(t) = f(t)u(-t)$  为输入的反因果分量。

为了从式(2.65)推导出零输入响应的另一个定义式: 式(2.54)的第一式, 需要下述的反因果微分定理。

反因果微分定理,

$$[f'(t)]_- = [f_-(t)]' + f(0_-)\delta(t) \quad (2.66)$$

$$[f''(t)]_- = [f_-(t)]'' + f(0_-)\delta'(t) + f'(0_-)\delta(t) \quad (2.67)$$

$$[f^{(n)}(t)]_- = [f_-(t)]^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0_-)\delta^{(n-1-i)}(t) \quad (2.68)$$

式中,  $[f^{(i)}(t)]_- = f^{(i)}(t)u(-t)$  ( $i=0,1,\dots$ ) 为信号的  $i$  阶导数的反因果分量;  $[f_-(t)]^{(i)}$  为信号反因果分量的  $i$  阶导数。

**证明** 对  $f_-(t) = f(t)u(-t)$  的两边求导, 即可证明式(2.66)成立, 式(2.67)和式(2.68)是式(2.66)的推论。

反因果微分定理表明了信号各阶导数的反因果分量与信号反因果分量的相应阶导数之间的关系, 它们之差与系统初始条件有关。

对  $B(t) * f_-(t) = \sum_{i=0}^n b_i [f_-(t)]^{(n-i)}$  使用反因果微分定理后, 有

$$B(t) * f_-(t) = \sum_{i=0}^n b_i [f^{(n-i)}(t)]_- - \sum_{i=0}^n b_i \sum_{k=0}^{n-i-1} f^{(k)}(0_-)\delta^{(n-i-1-k)}(t)$$

把  $t < 0$  时的系统微分方程

$$\sum_{i=0}^n b_i [f^{(n-i)}(t)]_- = \sum_{i=0}^n a_i [y^{(n-i)}(t)]_-$$

代入上式, 有

$$B(t) * f_-(t) = \sum_{i=0}^n a_i [y^{(n-i)}(t)]_- - \sum_{i=0}^n b_i \sum_{k=0}^{n-i-1} f^{(k)}(0_-)\delta^{(n-i-1-k)}(t)$$

再对  $\sum_{i=0}^n a_i [y^{(n-i)}(t)]_-$  使用反因果微分定理, 有

$$B(t) * f_-(t) = \sum_{i=0}^n a_i [y_-(t)]^{(n-i)} + x_{zi}(t) = A(t) * y_-(t) + x_{zi}(t)$$

式中, 等效零输入激励  $x_{zi}(t)$  由式(2.53)给出。把它代入式(2.65)后, 有

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) &= u(t)[h_x(t) * \{A(t) * y_-(t) + x_{zi}(t)\}] = u(t)[\delta(t) * y_-(t)] + h_x(t) * x_{zi}(t) \\ &= h_x(t) * x_{zi}(t) \end{aligned}$$

其中, 利用了  $u(t)[\delta(t) * y_-(t)] = u(t)y_-(t) = 0$  和式(2.63)。这样, 我们从零输入响应的第一个定义式[式(2.17)的第二式]推导出了其第二个定义式[式(2.54)的第一式]。

反过来说, 从式(2.54)的第一式出发, 使用与上述过程相反的推导过程, 也可以得出式(2.17)的第二式。

这表明, 零输入响应的两个定义式是等价的。

## 本章小结

1. 一个从  $-\infty$  时刻开始观察的 LTI 系统改为从零时刻开始观察时, 服从全响应等于零输入响应加零状态响应的可分解性, 并满足零输入线性和零状态线性。此性质经常用来分析 LTI 系统。

2. LTI 系统, 尤其是在零时刻进行切换的线性电路, 可表示为一个阶数等于其独立储能元件个数的常系数线性微分方程, 其初始条件记忆了零时刻之前的输入信号对系统的影响。

3. 描述 LTI 系统的微分方程的经典方法求解过程是: 首先, 从  $0_-$  时刻初始条件计算零输入条件下的  $0_+$  时刻初始条件; 然后, 由它确定由系统特征方程的特征根决定的零输入响应表示式中的待定常数, 从而得到系统的零输入响应; 再根据输入信号确定微分方程的一个特解, 把它加上由系统特征方程的特征根决定的齐次解, 就得到系统零状态响应的表达式, 并从  $0_-$  时刻初始条件计算零状态条件下的  $0_+$  时刻初始条件和由  $0_+$  时刻初始条件确定该表达式中的待定常数, 就得到系统的零状态响应; 最后, 把它与零输入响应相加后就得到系统的全响应。之后, 还可分析系统的暂态响应和稳态响应、自由响应和强迫响应等。

4.  $0_-$  时刻初始条件到  $0_+$  时刻初始条件的计算可使用等效电路法计算, 也可使用冲激匹配法计算, 还可使用  $0_-$  时刻初始条件和  $0_+$  时刻初始条件表达的等效零输入激励之间的冲激匹配的方法来计算。

5. 系统冲激响应是系统对单位冲激激励的零状态响应; 系统阶跃响应是系统对单位阶跃激励的零状态响应; 冲激响应是阶跃响应的微分, 阶跃响应是冲激响应的积分; 系统零状态响应是系统冲激响应与输入激励的卷积。用基于因果微分定理的卷积计算可分析系统的零状态响应、零输入响应和全响应。此等效激励法比经典方法更系统化, 而且方便有效。

6. 目前, 卷积计算使用解析法、图解法和性质法三种方法。解析法特别适用于因果信号或有限长信号的卷积; 图解法主要包括翻转、平移和加权积分三个过程; 性质法利用卷积的微积分性质来简化卷积的计算, 它与解析法或图解法结合起来使用时, 更为有效。

7. 卷积的代数性质有效地应用于系统的分析和综合, 尤其使一个高阶系统实现为若干个低阶系统的串并联。

### 8. 系统分析题型及其推荐解法

#### (1) 冲激响应求解

从系统特征方程到规范系统冲激函数  $h_x(t)$ , 然后把它代入原系统微分方程右式得原系统冲激响应  $h(t)$ 。

#### (2) 零状态响应求解

先计算系统冲激响应  $h(t)$ , 然后计算  $y_{zs}(t) = h(t) * f_+(t)$ 。

#### (3) 零输入响应求解

零输入响应的求解分以下三种情况:

情况 a: 给定  $f_-(t)$ , 计算  $y_{zi}(t) = [h(t) * f_-(t)]u(t)$ ;

情况 b: 给定  $0_-$  时刻初始条件, 计算  $y_{zi}(t) = h_x(t) * [\text{用 } 0_- \text{ 时刻初始条件表示的等效零输入激励 } x_{zi}(t)]$ ;

情况 c: 给定  $0_+$  时刻初始条件, 计算  $y_{zi}(t) = h_x(t) * [\text{用 } 0_+ \text{ 时刻初始条件表示的等效零输入激励 } x_{zi}(t)]$ 。

激励  $x_{zi}(t)$  ]。

(4) 全响应求解

情况 a: 给定  $f(t)$ , 计算  $y(t) = [h(t) * f(t)]u(t)$ ;

情况 b: 给定  $0_-$  时刻初始条件和  $f_+(t)$ , 计算  $y(t) = h(t) * [\text{用 } 0_- \text{ 时刻初始条件表示的等效零输入激励 } x_{zi}(t) + \text{等效零状态激励 } x_{zs}(t)]$ ;

情况 c: 给定  $0_+$  时刻初始条件和  $f_+(t)$ , 计算  $y(t) = h(t) * [\text{用 } 0_+ \text{ 时刻初始条件表示的等效零输入激励 } x_{zi}(t) + \text{等效零状态激励 } x_{zs}(t)]$ 。

(5)  $0_-$  时刻初始条件至  $0_+$  时刻初始条件的求解: 使用基于等效零输入激励不变的冲激匹配技术。

(6) 已知若干个初始条件及/或若干个输入时的响应求新初始条件及/或输入时的响应: 使用零状态线性及/或零输入线性概念。

## 习 题

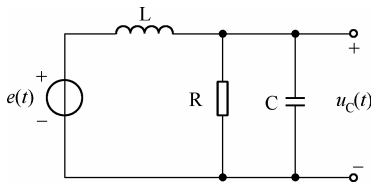
2.1 对如题图 2.1 所示的系统, 列出以  $u_C(t)$  为响应的微分方程。

2.2 对如题图 2.2 所示的电路, 已知  $u_C(0_-) = 2 \text{ V}$ ,  $i_L(0_-) = 1 \text{ A}$ , 求  $u_C(0_+)$  和  $u'_C(0_+)$ 。

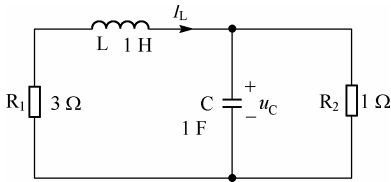
2.3 求以下系统的零输入响应:

(1) 系统  $r''(t) + 4r'(t) + 4r(t) = e(t)$ , 初始条件为  $r(0_+) = 1$  和  $r'(0_+) = 2$ 。

(2) 系统  $r''(t) + 5r'(t) + 6r(t) = e'(t)$ , 初始条件为  $r(0_-) = 1$  和  $r'(0_-) = -1$ 。



题图 2.1



题图 2.2

2.4 已知描述系统的微分方程和起始状态以及激励信号, 求其  $0_+$  初始值。

(1)  $r'(t) + 2r(t) = e(t)$ ,  $r(0_-) = 0$ ,  $e(t) = u(t)$

(2)  $r'(t) + 2r(t) = 3e'(t)$ ,  $r(0_-) = 0$ ,  $e(t) = u(t)$

(3)  $r''(t) + 6r'(t) + 8r(t) = e'(t)$ ,  $r(0_-) = 0$ ,  $r'(0_-) = 1$ ,  $e(t) = u(t)$

(4)  $r''(t) + 7r'(t) + 10r(t) = e''(t) + 3e'(t) + 2e(t)$ ,  $r(0_-) = 1$ ,  $r'(0_-) = 1$ ,  $e(t) = u(t)$

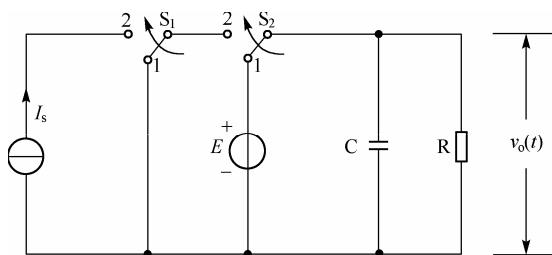
2.5 对题图 2.5 所示的电路, 当  $t < 0$  时, 开关  $S_1, S_2$  置于位置 “1”, 电路已进入稳态; 当  $t = 0$  时, 开关  $S_1, S_2$  的位置切换到 “2”。已知  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ F}$ , 求:

(1) 列出以  $v_0(t)$  为响应的微分方程;

(2)  $0_-$  和  $0_+$  时刻的初始条件:  $v_0(0_-)$  和  $v_0(0_+)$ ;

(3) 系统的零输入响应、零状态响应和全响应, 并指出其中的暂态响应和稳态响应。

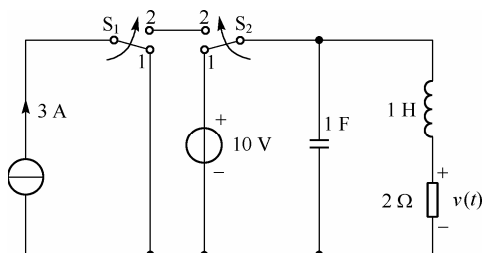




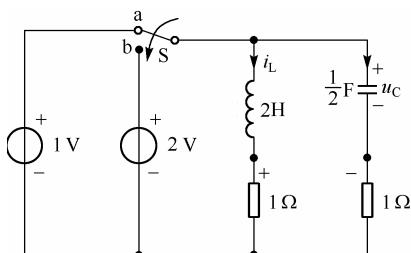
题图 2.5

2.6 对题图 2.6 所示的电路,  $t=0$  以前开关位于“1”, 已进入稳态,  $t=0$  时刻,  $S_1$  与  $S_2$  同时自“1”转至“2”, 求输出电压  $v(t)$  的全响应, 并指出其零输入响应、零状态响应。

2.7 对题图 2.7 所示的电路, 当  $t < 0$  时, 开关  $S$  位于“a”处并已达到稳态, 当  $t=0$  时, 开关  $S$  自“a”转到“b”, 试列出以电感电流  $i_L(t)$  为响应的微分方程, 求  $t > 0$  时的零输入响应、零状态响应和全响应, 并指出暂态响应和稳态响应。



题图 2.6



题图 2.7

2.8 求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应:

(1) 系统  $r''(t) + 4r'(t) + 3r(t) = e(t)$ , 初始条件为  $r(0_-) = 1$  和  $r'(0_-) = 1$ , 激励  $e(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

(2) 系统  $r''(t) + 2r'(t) + 2r(t) = e'(t)$ , 初始条件为  $r(0_-) = 0$  和  $r'(0_-) = 1$ , 激励  $e(t) = u(t)$ 。

(3) 系统  $r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = e''(t) + 3e'(t)$ , 初始条件为  $r(0_-) = 1$  和  $r'(0_-) = 2$ , 激励  $e(t) = u(t)$ 。

2.9 求下列微分方程描述的系统冲激响应和阶跃响应。

(1)  $r'(t) + 3r(t) = 2e'(t)$

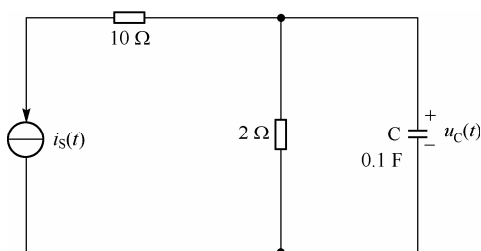
(2)  $r'(t) + 2r(t) = e'(t) - e(t)$

(3)  $r''(t) + r'(t) + r(t) = e'(t) + e(t)$

(4)  $r'(t) + 2r(t) = e''(t) + 3e'(t) + 3e(t)$

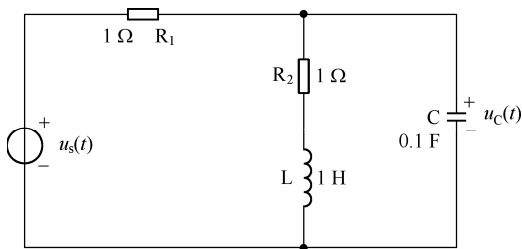
2.10 某 LTI 系统满足微分-积分方程  $r'(t) + 5r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)f(t-\tau)d\tau - e(t)$ , 其中  $e(t)$  为该系统的激励信号,  $f(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$ , 求该系统的冲激响应。

2.11 对题图 2.11 所示的电路, 已知  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$ , 列出以  $u_c(t)$  为响应的微分方程, 并求系统的冲激响应和阶跃响应。



题图 2.11

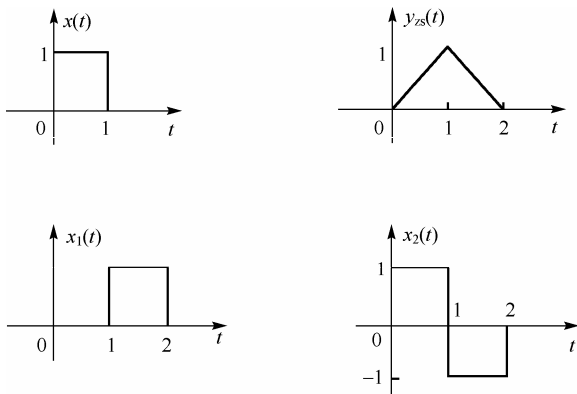
2.12 对题图 2.12 所示的电路, 已知  $R_1=1\ \Omega$ ,  $R_2=1\ \Omega$ ,  $L=1\ \text{H}$ ,  $C=1\ \text{F}$ ,  $u_s(t)=2e^{-t}u(t)\ \text{V}$ , 列出以  $u_c(t)$  为响应的微分方程, 并求系统的冲激响应、阶跃响应和零状态响应。



题图 2.12

2.13 某线性时不变系统的输入  $x(t)$  与零状态响应  $y_{zs}(t)$  如题图 2.13 所示, 试求

- (1) 系统的冲激响应  $h(t)$ ;
- (2) 当输入如题图 2.13 所示的其他信号  $x_1(t)$  及  $x_2(t)$  时, 画出系统的零状态响应的波形。



题图 2.13

2.14 已知某 LTI 系统对  $\delta'(t)$  的零状态响应为  $3e^{-2t}u(t)$ , 试求

- (1) 系统的冲激响应;
- (2) 系统对激励  $2[u(t)-u(t-2)]$  产生的零状态响应。

2.15 某 LTI 系统, 对激励  $e_1(t)=u(t)$  的全响应是  $r_1(t)=2e^{-t}u(t)$ , 对激励  $e_2(t)=\delta(t)$  的全响应是  $r_2(t)=\delta(t)$ , 求

- (1) 该系统的零输入响应  $r_{zi}(t)$ ;

(2) 初始条件保持不变时, 系统对激励  $f_3(t) = e^{-t}u(t)$  的全响应  $r_3(t)$ 。

2.16 已知某 LTI 系统在激励信号  $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$  下的零状态响应为  $y_1(t)$ , 又已知该系统在  $x_2(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$  下的零状态响应为  $y_2(t) = -2y_1(t) + e^{-2t}u(t)$ , 求该系统的单位冲激响应  $h(t)$  [提示:  $x_2(t) = x_1'(t) + 2x_1(t)$ ]。

2.17 已知有某 LTI 系统, 起始状态未知, 在激励为  $x(t)$  时的全响应为  $(2e^{-3t} + \sin 2t)u(t)$ , 激励为  $2x(t)$  时的全响应为  $u(t) * e^{-3t}u(t)$ , 求

(1) 起始状态不变, 当激励为  $x(t-1)$  时的全响应, 并指出零输入响应和零状态响应;

(2) 起始状态是原来的两倍, 激励为  $2x(t)$  时的全响应。

2.18 已知某系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$ , 当系统的激励  $f(t) = e^{-4t}u(t)$  时, 系统的全响应  $y(t) = \left(\frac{14}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)u(t)$ , 试求该系统的零输入响应与零状态响应、自由响应与强迫响应。

2.19 各信号如题图 2.19 所示, 求下列卷积并画出波形图。

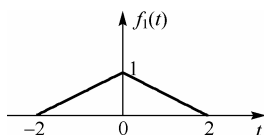
(1)  $f_1(t) * f_2(t)$

(2)  $f_1(t) * f_3(t)$

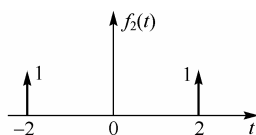
(3)  $f_1(t) * f_4(t)$

(4)  $f_1(t) * f_2(t) * f_2(t)$

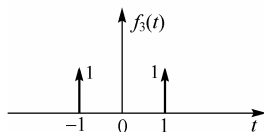
(5)  $f_1(t) * [2f_4(t) - f_3(t-3)]$



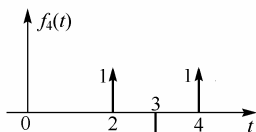
(a)



(b)



(c)



(d)

题图 2.19

2.20 计算下列卷积:

(1)  $e^{-3t}u(t) * e^{-5t}u(t)$

(2)  $u(t) * e^{-3t}u(t)$

(3)  $\delta(t) * 2$

(4)  $t^2e^{-t}u(t) * \delta'(t)$

(5)  $[\sin(\pi t)u(t)] * tu(t) * \delta'(t) * \delta'(t)$

(6)  $[u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-1)]$

(7)  $G_4(t) * G_2(t)$

(8)  $tu(t) * u(t)$

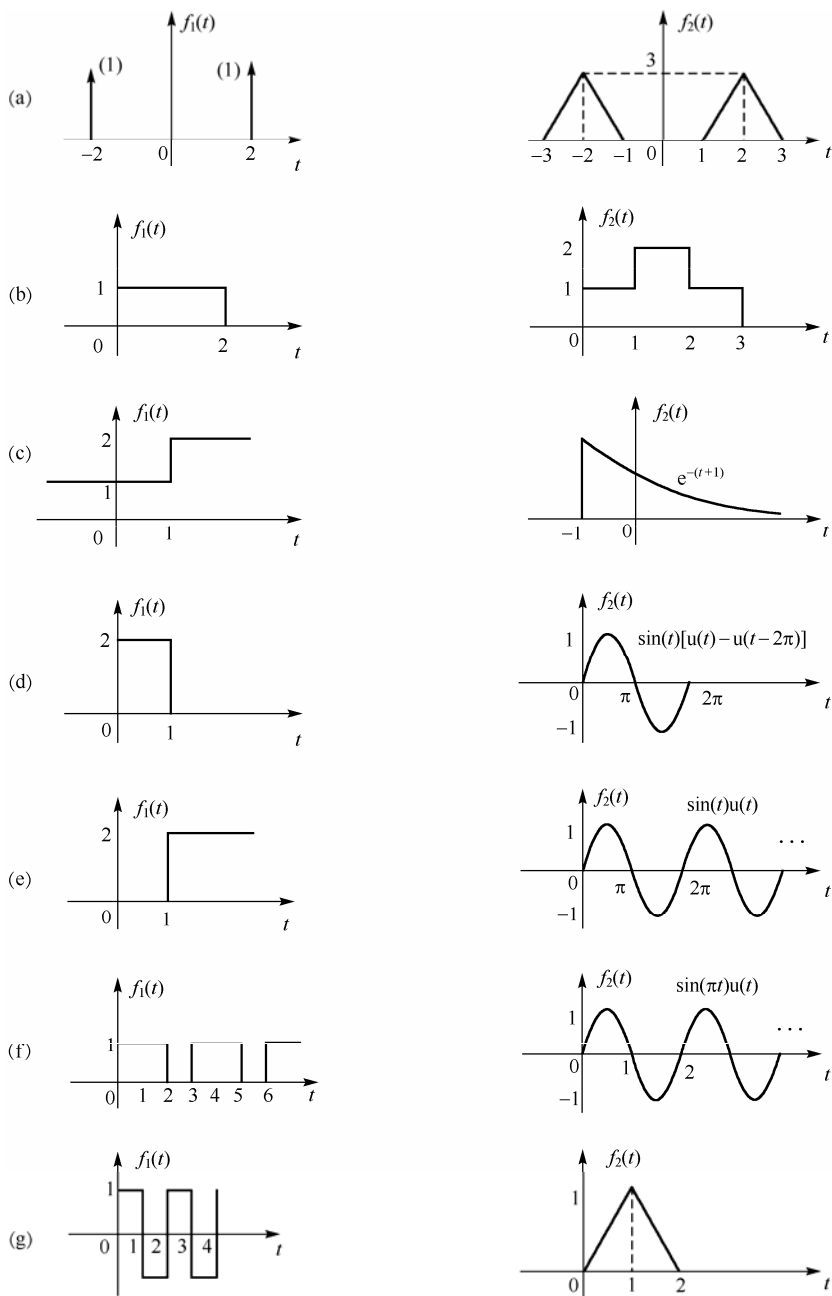
(9)  $\cos tu(t) * e^{-2t}u(t)$

(10)  $\sin(2\pi t)[u(t) - u(t-1)] * u(t)$

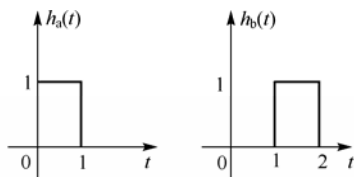
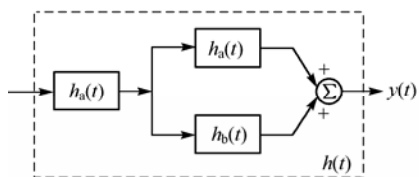
2.21 对题图 2.21 所示的各组函数, 计算卷积积分  $f_1(t) * f_2(t)$ , 并粗略画出  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  卷积的波形。

2.22 题图 2.22 所示的系统由若干子系统组成, 各子系统的冲激响应分别为  $h_a(t) =$

$u(t) - u(t-1)$  和  $h_b(t) = u(t-1) - u(t-2)$ ，求总系统的冲激响应  $h(t)$ 。

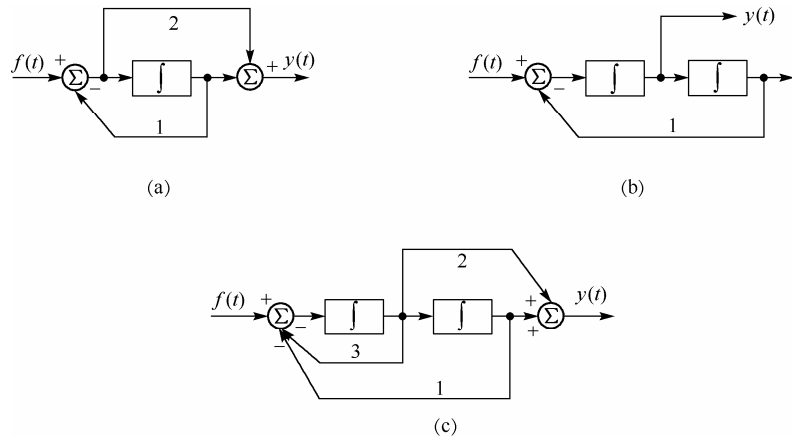


题图 2.21



题图 2.22

2.23 分别写出描述题图 2.23 (a), (b) 和 (c) 所示系统的微分方程，并求各系统的冲激响应  $h(t)$ 。



题图 2.23

## 第3章 连续时间信号与系统的频域分析

### 学习要点

本章讨论连续信号与系统的频域分析。要求读者：

1. 掌握傅里叶变换分析技术和傅里叶级数分析技术的基本概念和计算，尤其要注意应用性质来计算一些常用信号的频谱；
2. 熟悉时域特性与频域特性的对应关系；
3. 弄清信号频谱的意义以及连续谱与离散谱的区别和联系；
4. 认真掌握卷积定理，它是系统频域分析的重要工具；
5. 采样定理是离散信号处理的理论基础，应领会其含义并会应用。

### 3.1 非周期信号的频域分析——傅里叶变换

#### 3.1.1 非周期信号的傅里叶变换

根据傅里叶变换(Fourier Transformation, FT)理论，任何满足狄里克雷(Dirichlet)条件<sup>①</sup>的非周期连续信号都可表示为无限多个幅度无穷小、频率连续变化的复正弦信号的叠加，即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.1)$$

其中，

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.2)$$

式(3.2)称为傅里叶正变换，式(3.1)称为傅里叶逆变换。 $f(t)$  ( $-\infty < t < +\infty$ )和 $F(j\omega)$  ( $-\infty < \omega < +\infty$ )称为傅里叶变换对，记做 $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$ 。 $f(t)$ 为信号的时域表示； $F(j\omega)$ 是信号的频域表示，它描绘了信号的频谱密度。两者互为映像。

把式(3.1)的两端乘以 $e^{-j\omega t}$ 后对 $t$ 积分，有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega - \omega')t} dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega = F(j\omega) \end{aligned}$$

即得到了等式(3.2)。这证明了傅里叶变换的正确性。

在此证明过程中，利用了等式

---

① 狄里克雷条件是：(1)函数连续，或仅有有限个第一类间断点；(2)有有限个极值；(3)绝对可积。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} e^{j\omega t} dt \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{T}{\pi} \text{Sa}(T\omega) \right] = \delta(\omega) \quad (3.3)$$

等式  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(u-\omega)t} dt = \delta(u-\omega)$  表明, 傅里叶变换使用的基函数  $e^{-j\omega t}$  是正交基函数, 因此傅里叶变换是正交积分变换。

由傅里叶变换的定义式(3.2)易知, 其存在的充分条件是  $f(t)$  为绝对可积函数, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

借助冲激函数、阶跃函数等奇异函数的概念, 可使许多非绝对可积的信号, 如周期信号、因果斜坡函数等存在傅里叶变换。

### 3.1.2 傅里叶变换的物理意义——连续谱

实信号  $f(t)$  的频谱密度函数

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.4)$$

一般为复数, 3.2 节将要证明, 其幅度谱  $|F(j\omega)|$  为偶函数, 其相位谱  $\varphi(\omega)$  为奇函数。于是, 式(3.1)可表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

因此, 傅里叶变换的物理意义是: 非周期连续信号  $f(t)$  可表示为无限多个幅度  $|F(j\omega)| \frac{d\omega}{\pi}$  无穷小的、频率  $\omega$  连续变化的、有相位函数  $\varphi(\omega)$  的余弦信号的叠加。正因为每个频率分量的幅度无限小, 因此称  $F(j\omega)$  为信号  $f(t)$  的频谱密度函数, 简称为信号  $f(t)$  的谱。

## 3.2 典型非周期信号的傅里叶变换和傅里叶变换的性质

### 3.2.1 典型非周期信号的傅里叶变换

首先, 我们用傅里叶变换的定义直接计算一些典型非周期信号的傅里叶变换。

#### 1. 单位冲激信号

把  $f(t) = \delta(t)$  代入式(3.2), 利用冲激的抽样性质, 易知冲激信号的傅里叶变换为与频率无关的常数 1 (平坦频谱), 即

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad (3.6)$$

单位冲激信号及其频谱如图 3.1 所示。

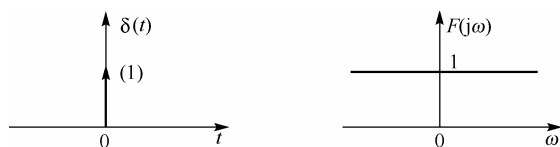


图 3.1 单位冲激信号及其频谱

## 2. 单位直流信号

同样地，把频域冲激  $F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$  代入式 (3.1)，利用冲激的抽样性质，易知其傅里叶逆变换为单位直流信号 1，即

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (3.7)$$

单位直流信号及其频谱如图 3.2 所示。

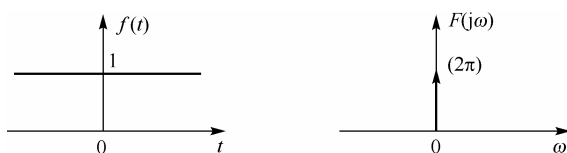


图 3.2 单位直流信号及其频谱

## 3. 因果指数衰减信号

把因果指数衰减信号  $f(t) = e^{-\sigma t}u(t)$  代入式 (3.2)，有

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \frac{1}{\sigma + j\omega}$$

$$\text{即} \quad |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad \text{和} \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \quad (3.8)$$

因果指数衰减信号及其幅度谱和相位谱如图 3.3 所示。

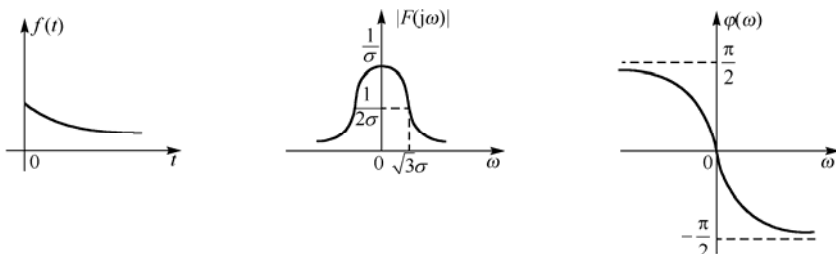


图 3.3 因果指数衰减信号及其幅度谱和相位谱

## 4. 矩形窗信号

把脉宽  $\tau$  的矩形窗信号  $G_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$  代入式 (3.2)，有

$$F(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad \text{即} \quad G_\tau(t) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3.9)$$

幅度为  $E$  的矩形窗信号及其频谱如图 3.4 所示。



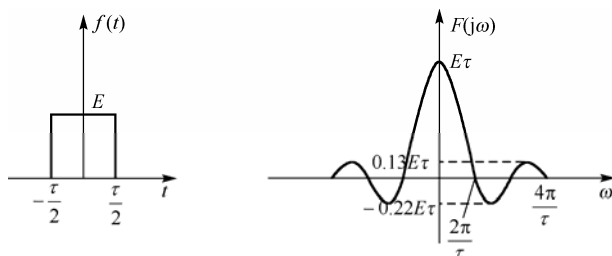


图 3.4 矩形窗信号及其频谱

### 3.2.2 傅里叶变换性质

傅里叶变换有许多重要性质，这些性质不但可用于计算复杂信号的傅里叶变换，而且在理论和工程实践中也有十分重要的作用。下面逐一介绍之。

#### 1. 线性性质

傅里叶变换是一个线性运算，它满足叠加定理。即若  $f_i(t) \Leftrightarrow F_i(j\omega)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )，则

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega) \quad (3.10)$$

从傅里叶变换的定义直接可以证明傅里叶变换的线性性质成立。它表明傅里叶变换是一个可与加权和运算交换的线性运算。

#### 2. 共轭对称性

任何实信号  $f(t)$  的频谱一定是共轭对称的，即若以上标 “\*” 表示复共轭，则

$$F(-j\omega) = F^*(j\omega) \quad (3.11)$$

**证明：**考虑到信号  $f(t)$  为实函数，把式(3.2)的两端取复共轭后，可以得到

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(-j\omega)t} dt = F(-j\omega)$$

即式(3.11)成立。

#### 3. 奇/偶对称性

- 对任何实信号  $f(t)$  而言，其频谱的**实部偶对称**，**虚部奇对称**，**幅度偶对称**，**相位奇对称**。即若令  $F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ ，则

$$\begin{aligned} R(-\omega) &= R(\omega), & X(-\omega) &= -X(\omega) \\ |F(-j\omega)| &= |F(j\omega)|, & \varphi(-\omega) &= -\varphi(\omega) \end{aligned} \quad (3.12)$$

很易证明，此性质是前述共轭对称性的直接推论。

- **实偶信号的频谱一定是实偶函数**，**实奇信号的频谱一定是虚奇函数**。也就是说，
  - (1) 如果实信号  $f(t)$  偶对称，即  $f(-t) = f(t)$ ，则频谱是实函数，即  $F(j\omega) = R(\omega)$ ，并且是偶函数，即  $F(-j\omega) = F(j\omega)$ 。
  - (2) 如果实信号  $f(t)$  奇对称，即  $f(-t) = -f(t)$ ，则频谱是虚函数，即  $F(j\omega) = jX(\omega)$ ，并且是奇函数，即  $F(-j\omega) = -F(j\omega)$ 。

**证明：**实际上我们只需证明实偶信号的频谱一定是实函数，而实奇信号的频谱一定是虚函数。因为只要此论断成立，后面的论断就直接来自式(3.12)所述的奇/偶对称性。

由此对实偶信号  $f(t)$ ，根据式(3.2)可知

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt = R(\omega) \end{aligned} \quad (3.13)$$

式中，第二个积分项等于零是由于实偶信号  $f(t)$  和实奇信号  $\sin(\omega t)$  相乘后是一个实奇信号，因此它在对称区间上的积分必等于零。

同理可证，对实奇信号  $f(t)$ ，有

$$F(j\omega) = j2 \int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt = jX(\omega) \quad (3.14)$$

- 实信号  $f(t)$  的偶分量  $f_e(t)$  的傅里叶变换是  $f(t)$  的傅里叶变换的实部，而  $f(t)$  的奇分量  $f_o(t)$  的傅里叶变换是虚数  $j$  乘以  $f(t)$  的傅里叶变换的虚部，即

$$f_e(t) \Leftrightarrow R(\omega), \quad f_o(t) \Leftrightarrow jX(\omega) \quad (3.15)$$

由于因果信号的偶分量和奇分量都不可能等于零，因此因果信号的傅里叶变换一定既有实部，也有虚部，即它不可能是纯实的，也不可能是纯虚的。

上述对称性可有效地用于分析非周期信号的频谱。下面举几例进行说明。

**例 3.1** 求双边指数衰减信号  $f(t) = e^{-\sigma|t|}$  的频谱。

**解** 由于双边指数衰减信号  $\frac{1}{2}e^{-\sigma|t|}$  是因果指数衰减信号  $e^{-\sigma}u(t)$  的偶分量，所以利用式(3.8)，有

$$e^{-\sigma|t|} \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sigma + j\omega}\right\} = \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$$

式中， $\operatorname{Re}\{\}$  表示取实部运算。双边指数衰减信号及其频谱如图 3.5 所示。

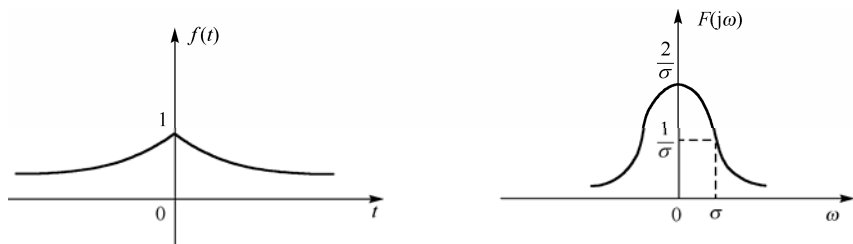


图 3.5 双边指数衰减信号及其频谱

**例 3.2** 求符号函数  $f(t) = \operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$  的频谱。

**解** 由于符号函数  $\operatorname{sgn}(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (e^{-\sigma}u(t) - e^{-\sigma(-t)}u(-t))$  是因果指数衰减信号  $2e^{-\sigma}u(t)$  的奇分量在  $\sigma \rightarrow 0$  时的极限，所以利用式(3.8)，有

$$\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow 2 \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ j \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\sigma + j\omega} \right\} \right] = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \frac{-2j\omega}{\sigma^2 + \omega^2} \right] = \frac{2}{j\omega} \quad (3.16)$$

式中,  $\operatorname{Im}\{\}$  表示取虚部运算。符号函数及其幅度谱和相位谱如图 3.6 所示。

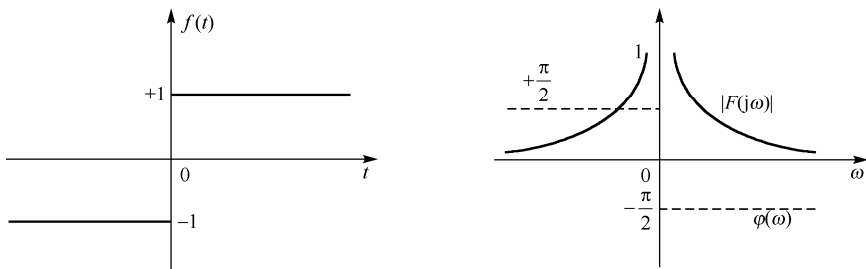


图 3.6 符号函数及其幅度谱和相位谱

**例 3.3** 求阶跃信号  $f(t) = u(t)$  的频谱。

**解** 由于  $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t))$ , 即阶跃信号的偶分量是直流  $1/2$ , 奇分量是符号函数的一半, 所以利用式 (3.7) 和式 (3.16), 有

$$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.17)$$

阶跃信号及其频谱如图 3.7 所示。

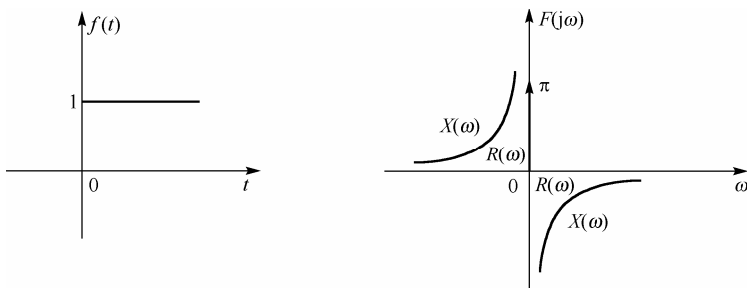


图 3.7 阶跃信号及其频谱

#### 4. 时延定理 (频域复指数加权)

时域延迟  $t_0$  对应于频域指数加权  $e^{-j\omega t_0}$ , 即频域附加线性相位滞后:

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(j\omega) \quad (3.18)$$

**证明:** 由傅里叶变换定义, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega(t - t_0)} dt = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

时延定理表明, 信号的延迟不改变信号的幅度谱, 仅在相位谱中引入线性相位滞后项  $-\omega t_0$ 。

**例 3.4** 利用时延定理, 有  $\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$ , 所以

$$\frac{1}{2}[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] \Leftrightarrow \frac{1}{2}[e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0}] = \cos(\omega t_0) \quad (3.19)$$

同理 
$$\frac{1}{2j}[\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)] \Leftrightarrow \sin(\omega t_0) \quad (3.20)$$

它们是梳齿滤波器的实现原理，它们有周期等于  $2\pi/t_0$  的周期频谱，并且在基周期内交替地有带阻特性和带通特性。

### 5. 频移定理(时域复指数加权或复调制定理)

频谱搬移  $\omega_0$  对应于时域用复正弦信号  $e^{j\omega_0 t}$  加权，即

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(j(\omega - \omega_0)) \quad (3.21)$$

**证明：**由傅里叶变换的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(j(\omega - \omega_0))$$

频移定理表明，复正弦信号  $e^{j\omega_0 t}$  调制后的信号频谱是原信号的频谱向右搬移  $\omega_0$  的结果。

复调制定理的物理实现是双路正交调制，它用于单边带通信。

**例 3.5** 求正弦信号的频谱。

**解** 利用频移定理和式(3.7)，有

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.22)$$

这使得 
$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3.23)$$

$$\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3.24)$$

这表明正弦、余弦周期信号在正、负信号频率上各有一根谱线，如图 3.8 所示。

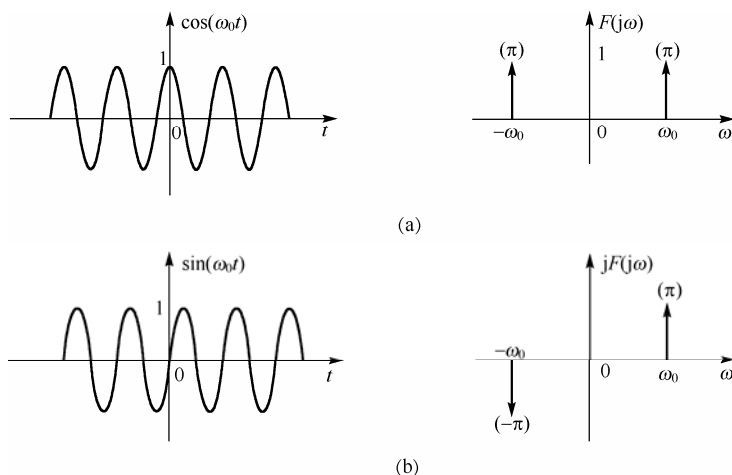


图 3.8 余弦信号和正弦信号及其频谱

### 6. 调制定理

用余弦信号  $\cos(\omega_0 t)$  调制后的信号频谱是原信号的频谱减半后分别向左和向右频率搬移  $\omega_0$  的结果，如图3.9所示，即

$$\cos(\omega_0 t) f(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))] \quad (3.25)$$

类似地, 可知

$$\sin(\omega_0 t) f(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))] \quad (3.26)$$

**证明:** 调制定理是前述复调制定理的直接推论。

图3.9给出了余弦调制时的频谱搬移。其中,  $G(\omega)$  是被调低频信号的频谱,  $F(\omega)$  是相应的已调高频信号的频谱。调制定理是双边带信号通信的基础。

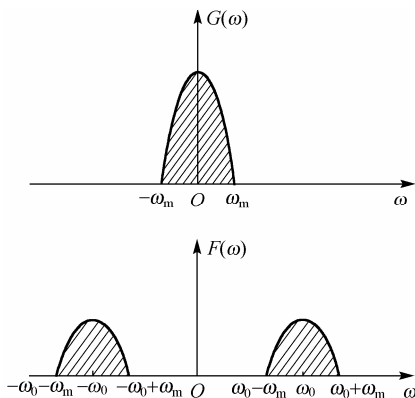


图 3.9 余弦调制时的频谱搬移

**例 3.6** 求因果正弦信号的频谱。

利用调制定理和式(3.17), 有

$$\cos(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \quad (3.27)$$

和

$$\sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega + \omega_0} \right) \quad (3.28)$$

图3.10(a)和(b)分别示出了因果正弦和余弦信号及其幅度谱。与图3.8(a)和(b)比较, 可以看出因果化对频谱的影响。与阶跃信号的频谱相比, 可看出正余弦调制的影响。

**例 3.7** 求矩形调幅信号(数字通信中的幅度键控, Amplitude Shift Keying, 简称 ASK)的频谱。

**解** 利用调制定理和矩形窗函数的频谱易知, ASK 信号及其频谱为

$$E \cos(\omega_0 t) G_\tau(t) \Leftrightarrow \frac{E\tau}{2} \left[ \text{Sa} \left( \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2} \right) + \text{Sa} \left( \frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2} \right) \right] \quad (3.29)$$

图3.11示出了 ASK 信号及其频谱。

**例 3.8** 求因果指数衰减正弦信号的频谱。

**解** 利用调制定理和式(3.8), 有

$$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_0)} \right) = \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2} \quad (3.30)$$

和

$$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

(3.31)

图3.12 (a) 和 (b) 分别示出了因果指数衰减正弦信号及其频谱。

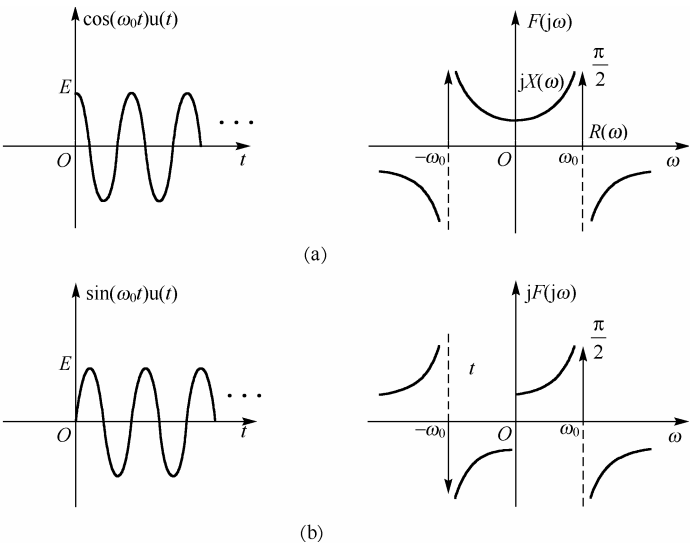


图 3.10 因果正弦和余弦信号及其频谱

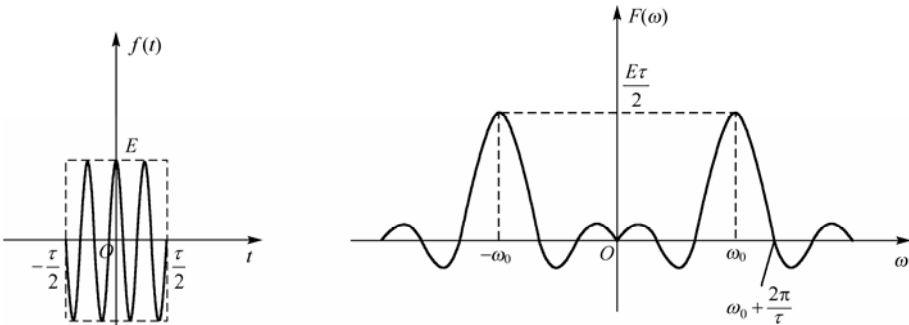


图 3.11 ASK 信号及其频谱

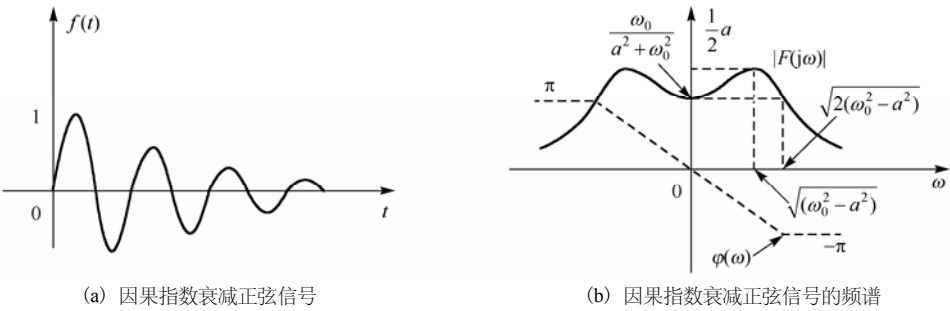


图 3.12 因果指数衰减正弦信号及其频谱

7. 尺度 (Scaling) 定理

信号在时域压缩/扩展  $a$  倍相应于信号在频域扩展/压缩  $a$  倍，即

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.32)$$

测不准原理表明, 每个信号的时宽-带宽积为常数(虽然此常数与所论信号有关), 因此当信号的时宽压缩  $a$  倍时, 则它的频宽就一定要扩展  $a$  倍。尺度定理就是测不准原理的具体体现。

特殊地, 当  $a = -1$  时, 有

$$f(-t) \Leftrightarrow F(-j\omega) \quad (3.33)$$

**证明:** 由傅里叶变换的定义, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-j\omega t} dt &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} \frac{dx}{a} & a > 0 \\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x} \frac{dx}{a} & a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

这就是尺度定理。图 3.13 例示了尺度定理。

**例 3.9** 已知  $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$ , 求  $f(at - t_0)$  和  $f(t_0 - at)$  的傅里叶变换。

**解** 由时延定理, 有

$$g\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \Leftrightarrow G(j\omega)e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

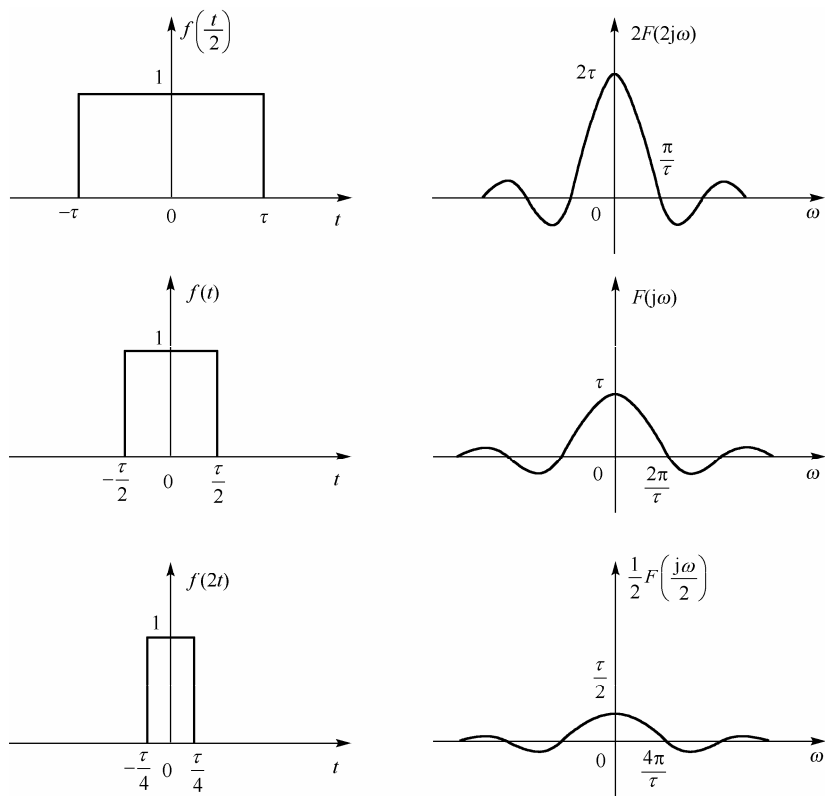


图 3.13 尺度定理的例示

其中,  $g(t) = f(at)$ , 并且, 由尺度定理有

$$G(j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

这样有

$$f(at - t_0) = g\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

再由式(3.33)有

$$f(t_0 - at) = f(-(at - t_0)) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(-j\frac{\omega}{a}\right) e^{j\frac{\omega t_0}{a}} \quad (3.34)$$

实际上, 时延定理和尺度定理是这里的更一般情况的两个特例。

## 8. 时域微分性质

时域微分相应于频域乘以  $j\omega$ , 即

$$f'(t) \Leftrightarrow j\omega F(j\omega) \quad (3.35)$$

**证明:** 把式(3.1)对  $t$  求导后, 有

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Leftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

$$\text{推论:} \quad f^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3.36)$$

**例 3.10** 求  $\delta^{(n)}(t)$  的傅里叶变换。

**解** 由式(3.36)可知

$$\delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow (j\omega)^n, \quad \text{即 } (-j)^n \delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow \omega^n \quad (3.37)$$

## 9. 时域卷积定理

时域卷积相应于频域相乘, 即

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega) \quad (3.38)$$

**证明:** 用式(3.2)计算  $f_1(t) * f_2(t)$  的傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] f_1(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) \\ &= F_1(j\omega) F_2(j\omega) \end{aligned}$$

**推论:** 对于有冲激响应  $h(t)$  的 LTI 系统而言, 激励  $f(t)$  产生的零状态响应为

$$y(t) = h(t) * f(t)$$

在频域中有

$$Y(j\omega) = H(j\omega) F(j\omega) \quad (3.39)$$

其中, 系统频率响应函数  $H(j\omega)$  是系统冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换。



该推论是系统频域分析以及滤波器理论的基础,也是用傅里叶变换计算时域卷积的依据。

**例 3.11** 求底边长  $2\tau$ 、高  $\tau$  的三角窗信号  $B_{2\tau}(t) = \tau[r(t+\tau) - 2r(t) + r(t-\tau)]$  的傅里叶变换。

**解** 我们已经证明了  $B_{2\tau}(t) = G_{\tau}(t) * G_{\tau}(t)$ , 这样从卷积定理和式 (3.9) 有

$$B_{2\tau}(t) \Leftrightarrow \left( \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right)^2 \quad (3.40)$$

图 3.14 示出了三角窗信号及其频谱。与矩形窗的谱具有负的旁瓣不同,三角窗的谱只有正的旁瓣。

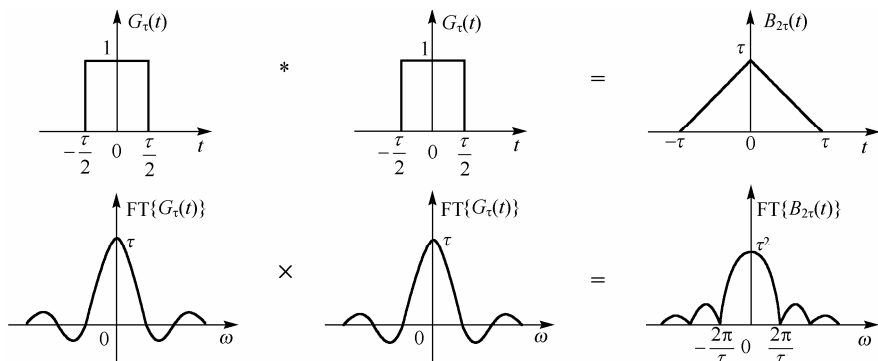


图 3.14 三角窗信号及其频谱

### 10. 时域积分性质

时域积分相应于频域除以  $j\omega$  并加上与  $f(t)$  的直流分量相应的频谱  $\pi F(0)\delta(\omega)$ , 即

$$f^{(-1)}(t) \Leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (3.41)$$

当信号  $f(t)$  无直流分量, 即  $F(0)=0$  时, 有

$$f^{(-1)}(t) \Leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3.42)$$

**证明:** 由于  $f(t) = f(t) * \delta(t)$  和  $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$ , 因此由卷积的积分定理可知

$$f^{(-1)}(t) = f(t) * u(t)$$

于是从傅里叶变换的卷积定理和式 (3.17), 有

$$f^{(-1)}(t) \Leftrightarrow F(j\omega) \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

**例 3.12** 求梯形窗信号  $f(t) = r(t+2) - r(t+1) - r(t-1) + r(t-2)$  的傅里叶变换。

**解** 由于  $f'(t) = u(t+2) - u(t+1) - u(t-1) + u(t-2) = G_{-2,-1}(t) - G_{1,2}(t)$ , 其中, 一般的矩形窗信号定义为  $G_{a,b}(t) \square u(t-a) - u(t-b)$ , 利用时延定理和式 (3.9) 可知,  $f'(t)$  的傅里叶变换为

$$\left( e^{j\frac{3\omega}{2}} - e^{-j\frac{3\omega}{2}} \right) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2j\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

它在  $\omega = 0$  时取零值, 这样使用积分定理后, 有

$$f(t) \Leftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 3\text{Sa}\left(\frac{3\omega}{2}\right) \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

## 11. 频域微分性质

频域微分相应于时域乘以  $-jt$ , 即

$$-jtf(t) \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(j\omega), \quad tf(t) \Leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} F(j\omega) \quad (3.43)$$

**证明:** 把式 (3.2) 对  $\omega$  求导后, 有

$$\frac{d}{d\omega} F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-jtf(t))e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow -jtf(t)$$

**推论:** 
$$t^n f(t) \Leftrightarrow \left(j \frac{d}{d\omega}\right)^n F(j\omega) \quad (3.44)$$

其中  $\left(j \frac{d}{d\omega}\right)^n$  表示把算子  $j \frac{d}{d\omega}$  运行  $n$  次, 每次先对  $\omega$  求导, 然后再乘以  $j$ 。

**例 3.13** 求因果幂信号  $t^n u(t)$  的傅里叶变换。

**解** 由式 (3.43) 和式 (3.18), 有

$$t^n u(t) \Leftrightarrow \left(j \frac{d}{d\omega}\right)^n \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = j^n \pi \delta^{(n)}(\omega) - \frac{(-j)^{n-1} n!}{\omega^{n+1}} \quad (3.45)$$

特殊地, 对因果斜坡信号有

$$r(t) \Leftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \quad (3.46)$$

**例 3.14** 求因果  $t^n$  加权的指数衰减信号  $t^n e^{-\sigma t} u(t)$  的傅里叶变换。

**解** 由式 (3.43) 和式 (3.8), 有

$$t^n e^{-\sigma t} u(t) \Leftrightarrow \left(j \frac{d}{d\omega}\right)^n \left[\frac{1}{\sigma + j\omega}\right] = \frac{n!}{(\alpha + j\omega)^{n+1}} \quad (3.47)$$

特殊地, 
$$te^{-\sigma t} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}, \quad t^2 e^{-\sigma t} u(t) \Leftrightarrow \frac{2}{(\alpha + j\omega)^3} \quad (3.48)$$

## 12. 频域卷积定理

频域卷积相应于时域相乘, 即

$$f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad (3.49)$$

**证明:** 用式 (3.1) 计算  $\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$  的傅里叶逆变换即可。

**例 3.15** 求被矩形窗截断后的信号  $f(t)G_\tau(t)$  的傅里叶变换。

解 由式(3.49)和式(3.9), 有

$$f(t)G_{\tau}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j(\omega-u)) \text{Sa}\left(\frac{u\tau}{2}\right) du \quad (3.50)$$

可见, 信号截断后, 频谱被矩形窗的频谱函数模糊了。例如, ASK 信号可视为截断了的余弦信号, 由图 3.11 可见两根冲激谱被频域 Sa 函数模糊后的结果。

### 13. 对偶性

$$\text{如果 } f(t) \Leftrightarrow F(j\omega), \quad \text{则 } F(jt) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3.51)$$

对偶性表明, 把时频域倒过来, 原有关系仍然成立。例如, 原有时域的卷积对应于频域的相乘, 则必有频域的卷积对应于时域的相乘。实际上, 前述关系都是成对出现的, 这并不是巧合, 而是对偶性的体现。

由对偶性可知, 把一个傅里叶变换对的  $t$  换成  $-\omega$ , 同时把  $\omega$  换成  $t$ , 然后在  $f$  前乘以  $2\pi$  后, 就得到一个与原傅里叶变换对对偶的新的傅里叶变换对。当  $f$  为偶函数时, 只需把  $\omega$  与  $t$  互换, 并在  $f$  前乘以  $2\pi$  即可。

**证明:** 首先用  $-t$  置换式(3.1)中的  $t$ , 有  $f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega(-t)} d\omega$ , 然后把其中的  $\omega$  和  $t$  互相置换, 有  $f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$ , 这表明  $2\pi f(-\omega)$  是  $F(jt)$  的傅里叶变换, 即式(3.51)成立。

**例 3.16** 求抽样信号  $\text{Sa}(\omega_c t)$  ( $\omega_c > 0$ ) 的傅里叶变换。

**解** 从  $G_{\tau}(t) \Leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ , 用  $2\omega_c$  替换  $\tau$ , 由对偶性有

$$\text{Sa}(\omega_c t) = \frac{1}{2\omega_c} [2\omega_c \text{Sa}(\omega_c t)] \Leftrightarrow \frac{2\pi}{2\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$\text{即} \quad \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \Leftrightarrow G_{2\omega_c}(\omega) \quad (3.52)$$

式中,  $\omega_c$  是理想低通信号  $\frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$  的截止频率。

抽样信号及其频谱如图 3.15 所示。

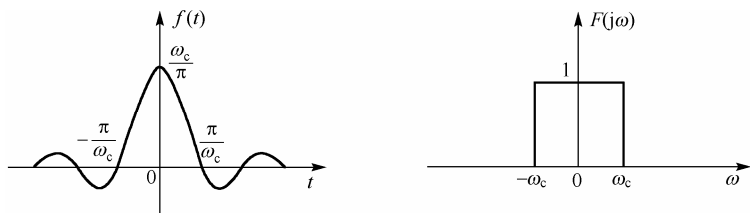


图 3.15 抽样信号及其频谱

这表明, 抽样信号是理想低通滤波器的冲激响应, 由于它是非因果无限持续时间信号, 因此它是物理不可实现的, 即理想低通滤波器是物理不可实现的。

表 3.1 给出了重要信号的傅里叶变换, 表 3.2 综述了傅里叶变换的性质。这些公式应熟记

并能灵活应用。其中，采样信号的傅里叶变换及傅里叶变换的时域采样特性和频域采样特性将在后面几节给出。

从 3.3 节开始，为简化标记，用  $F(\omega)$  取代  $F(j\omega)$ 。

表 3.1 重要傅里叶变换对

信 号	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$	信 号	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$
冲激信号	$\delta(t)$	1	直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$
矩形窗信号	$G_{\tau}(t)$	$\tau\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	理想低通信号	$\frac{\omega_c}{\pi}\text{Sa}(\omega_c t)$	$G_{2\omega_c}(\omega)$
阶跃信号	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	因果指数信号	$e^{-\sigma t}u(t)$	$\frac{1}{\sigma + j\omega}$
符号信号	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	双边指数信号	$e^{-\sigma t }$	$\frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$
三角窗信号	$B_{\tau}(t)$	$\left(\tau\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right)^2$	采样信号	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$

表 3.2 傅里叶变换的性质

性 质	时域 $f(t)$	频域 $F(j\omega)$	时频域对应
1. 线性性质	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega)$	
2. 对偶性	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$	
3. 奇/偶对称性	实信号 $f(t)$	实部偶对称，虚部奇对称 幅度偶对称，相位奇对称	
4. 尺度定理	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$	压扩与扩压
	$f(-t)$	$F(-j\omega)$	翻转与翻转
5. 时延定理	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$	时延与相移
6. 调制定理	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(j(\omega - \omega_0))$	调制与频谱搬移
	$\cos(\omega_0 t) f(t)$	$\frac{1}{2} [F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$	
	$\sin(\omega_0 t) f(t)$	$\frac{1}{2j} [F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))]$	
7. 时域微分性质	$f'(t)$	$j\omega F(j\omega)$	时域微分与频率加权
	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$	
8. 频域微分性质	$tf(t)$	$j \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$	时间加权与频域微分
	$t^n f(t)$	$\left(j \frac{d}{d\omega}\right)^n F(j\omega)$	
9. 时域积分性质	$f^{(-1)}(t)$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$	
10. 时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega)F_2(j\omega)$	相乘与卷积
11. 频域卷积定理	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$	
12. 时域采样定理	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$	$f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)$	抽样与周期化

13. 频域采样定理	$\frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT_s)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_s) \delta(\omega - n\omega_s)$	
------------	---	--	--

### 3.3 周期信号的频域分析——傅里叶级数

#### 3.3.1 周期信号的傅里叶级数分析

根据傅里叶级数(Fourier Series, FS)理论,任何满足狄里克雷(Dirichlet)条件<sup>①</sup>的周期连续信号 $f(t)$ 都可表示为无限多个频率为基频倍数的复正弦信号的加权和,即如果 $f(t) = f(t + kT)$ ,其中 $k$ 为任何整数, $T$ 为周期, $f_1 = 1/T$ 为基频, $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T$ 为相应的角频率,则

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3.53)$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.54)$$

为周期信号 $f(t)$ 的指数形式的傅里叶系数, $t_0$ 为任意常数,通常取0或 $-T/2$ 。

式(3.53)是用FS分析时对周期信号 $f(t)$ 进行的谐波分解,即用谐波加权和来合成信号 $f(t)$ ,因此,FS分析又称为谐波分析。

**证明:**把式(3.53)的两端乘以 $e^{-jn\omega_1 t}$ 后对 $t$ 在一个周期内积分,有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m e^{jm\omega_1 t} \right] e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(m-n)\omega_1 t} dt \right] \end{aligned}$$

$$\text{把} \quad \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(m-n)\omega_1 t} dt = \begin{cases} T & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (3.55)$$

代入上式后,就得到了式(3.54)。

式(3.55)表明, $e^{jn\omega_1 t}$ 是周期信号的正交基函数,因此,FS分析是一个正交级数展开分析。

#### 3.3.2 周期信号傅里叶变换的物理意义——离散谱

1. 采样序列 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ 的FS和傅里叶变换

$$\text{采样序列} \quad \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (3.56)$$

是一个周期等于采样间隔 $T$ 的周期信号,把它代入式(3.54)后,有

<sup>①</sup> 对周期信号而言的狄里克雷条件是:(1)函数连续,或在一个周期内仅有有限个第一类间断点;(2)在一个周期内有有限个极值;(3)在一个周期内,函数绝对可积。

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t-mT) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}$$

这使得

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_1 t} \Leftrightarrow \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega) \quad (3.57)$$

其中, 已利用了傅里叶变换的复调制定理和式(3.6), 并定义了频域采样间隔  $\omega_1 = 2\pi/T$ 。这表明, 时域采样序列与频域采样序列是一个傅里叶变换对, 如图 3.16 所示。

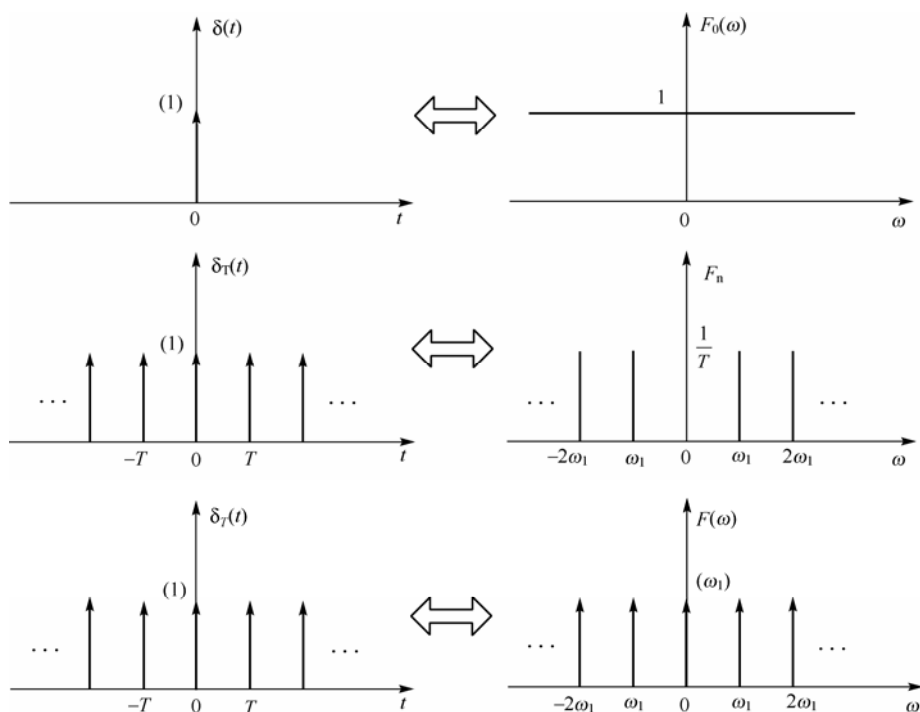


图 3.16 时域采样序列与频域采样序列是一个傅里叶变换对

## 2. 周期信号的傅里叶变换——离散谱

显然, 周期信号  $f(t)$  是其单周期截取后的非周期信号

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ 0 & t \notin [t_0, t_0 + T] \end{cases} \quad (3.58)$$

的周期重复, 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(t) * \delta(t-nT) \\ &= f_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = f_1(t) * \delta_T(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

利用傅里叶变换的卷积定理和式(3.57), 有

$$f(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) \left[ \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_1 F_1(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3.60)$$

此外, 对式(3.53)使用傅里叶变换的复调制定理并利用式(3.6), 有

$$f(t) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3.61)$$

比较式(3.60)和式(3.61), 有  $F_n = \frac{1}{T} F_1(n\omega_1)$  (3.62)

其中,  $T = 2\pi/\omega_1$ 。上述分析表明, 周期信号  $f(t)$  的频谱是离散的, 并且在  $n\omega_1$  的谱线强度为  $2\pi F_n = \omega_1 F_1(n\omega_1)$ 。式(3.62)也给出了利用傅里叶变换计算 FS 系数的方法。

由式(3.54)可知, 对实周期信号  $f(t)$  有  $F_{-n} = F_n^*$ , 这使得

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (F_n e^{jn\omega_1 t} + F_n^* e^{-jn\omega_1 t}) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (3.63)$$

这给出了周期信号  $f(t)$  的谐波形式的 FS 展开式和正余弦分量形式的 FS 展开式, 式(3.53)给出了  $f(t)$  的指数形式的 FS 展开式。由式(3.63)可知, 三种展开形式的系数之间的关系是

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = F_0, & c_n &= 2|F_n|, & \varphi_n &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(F_n)}{\operatorname{Re}(F_n)}\right) \\ a_n &= F_n + F_n^*, & b_n &= j(F_n - F_n^*) \end{aligned} \quad (3.64)$$

上述分析表明, 通过谐波分析, 周期信号  $f(t)$  可表示为无限多个频率为基频倍数、幅度为  $2|F_n|$ 、相位为  $\varphi_n$  的余弦信号之和。

### 3.3.3 典型周期信号的FS分析

#### 1. 周期信号的FS分析步骤

如上述所分析的那样, 周期信号的 FS 分析可通过下述步骤来完成:

步骤 1: 用式(3.58)截取与周期信号  $f(t)$  相应的非周期信号  $f_1(t)$ , 并计算其傅里叶变换表示式  $F_1(\omega)$ ;

步骤 2: 用式(3.62)计算周期信号  $f(t)$  的  $F_n$  后, 代入式(3.53), 得到其指数形式的 FS 展开式, 并用式(3.60)得到其离散谱, 画出其离散幅度谱和离散相位谱;

步骤 3: 用式(3.63)和式(3.64)计算周期信号  $f(t)$  的谐波形式或正余弦形式的 FS 展开式。

#### 2. 典型周期信号的FS分析

**例 3.17** 周期矩形脉冲信号的 FS 分析。

**解** 图 3.17 示出了幅度为  $E$ 、以窗函数  $EG_\tau(t)$  为基周期、占空比  $\tau/T < 1$  的周期矩形脉冲信号, 其中基频  $\omega_1 = 2\pi/T$ 。此时有

$$F_1(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

使得

$$F_n = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

这样

$$\begin{aligned} f_{\text{矩形}}(t) &= \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_1 t} \\ &= \frac{E\tau}{T} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \cos(n\omega_1 t) \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

图 3.17 示出了其 FS 系数和傅里叶变换。

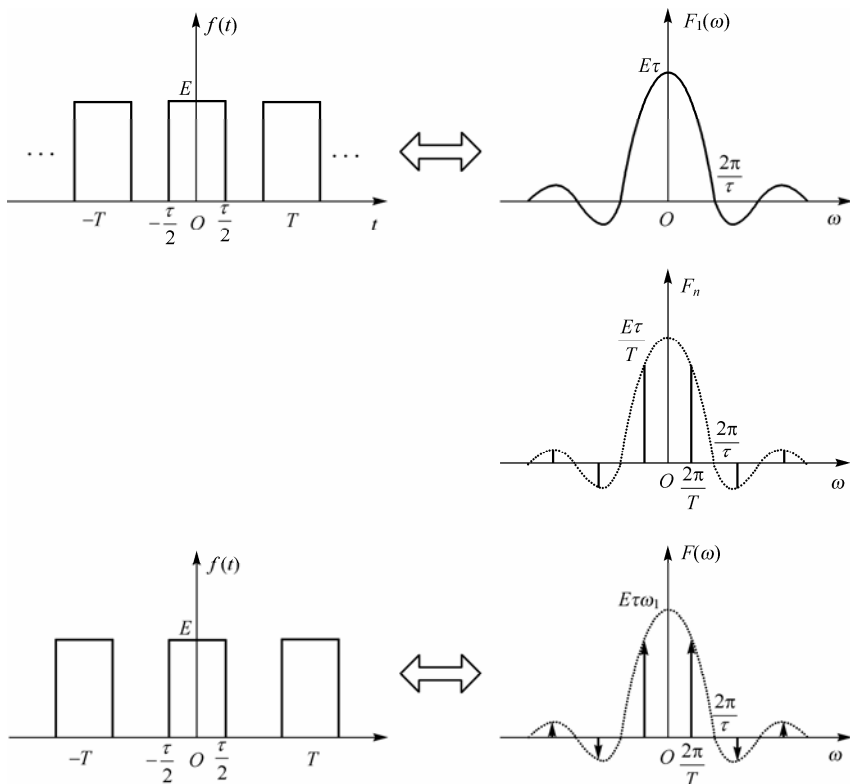


图 3.17 周期矩形脉冲信号 FS 系数和傅里叶变换

特殊地，当占空比  $\tau/T = 1/2$  时， $f(t)$  为周期方波信号，此时有

$$F_n = \frac{E}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-1} E}{(2m-1)\pi} & n = 2m-1 \\ 0 & n = 2m \end{cases}$$

使得

$$f_{\text{方波}}(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \cos((2m-1)\omega_1 t) \quad (3.66)$$



这表明, 周期方波信号只有直流分量和奇次余弦分量, 并且谐波幅度呈倒数衰减规律。

**例 3.18** 周期三角脉冲信号的 FS 分析。

**解** 图 3.18 示出了以三角窗函数  $EB_T(t)$  为基周期的周期三角脉冲信号, 此时由式 (3.41) 可

知,  $F_1(\omega) = \frac{ET}{2} \left( \text{Sa} \left( \frac{\omega T}{4} \right) \right)^2$ , 使得

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \left[ \frac{ET}{2} \left( \text{Sa} \left( \frac{n\omega_1 T}{4} \right) \right)^2 \right] = \frac{E}{2} \left( \text{Sa} \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right)^2 \\ &= \begin{cases} \frac{2E}{(2m-1)^2 \pi^2} & n = 2m-1 \\ 0 & n = 2m \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$f_{\text{三角}}(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos((2m-1)\omega_1 t) \quad (3.67)$$

这表明, 周期三角脉冲信号只有直流分量和奇次余弦分量, 并且谐波幅度呈平方倒数衰减规律, 即周期三角脉冲信号比周期方波信号衰减得要快。

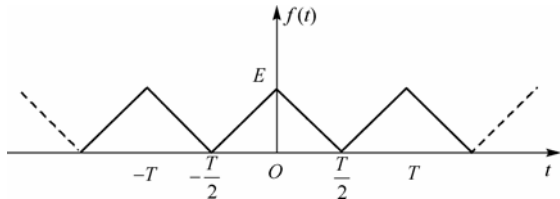


图 3.18 周期三角脉冲信号

**例 3.19** 周期锯齿脉冲信号的 FS 分析。

**解** 图 3.19 示出了以锯齿波窗函数  $\frac{Et}{T} G_T(t)$  为基周期的周期锯齿脉冲信号, 此时

$$f_1'(t) = \frac{E}{T} G_T(t) - \frac{E}{2} \left[ \delta \left( t + \frac{T}{2} \right) + \delta \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] \Leftrightarrow E \text{Sa} \left( \frac{\omega T}{2} \right) - E \cos \left( \frac{\omega T}{2} \right)$$

利用傅里叶变换的积分定理后, 有

$$F_1(\omega) = \frac{E}{j\omega} \left[ \text{Sa} \left( \frac{\omega T}{2} \right) - \cos \left( \frac{\omega T}{2} \right) \right]$$

这使得

$$F_n = \frac{E}{T} \left[ \frac{1}{jn\omega_1} \{ \text{Sa}(n\pi) - \cos(n\pi) \} \right] = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1} E}{j2n\pi} & n \neq 0 \end{cases}$$

则

$$f_{\text{锯齿}}(t) = \frac{E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\omega_1 t) \quad (3.68)$$

这表明, 周期锯齿脉冲信号只有正弦分量, 并且谐波幅度呈倒数衰减规律, 与周期方波信号的衰减速度相同。

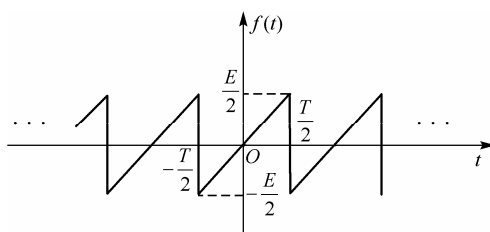


图 3.19 周期锯齿脉冲信号

**例 3.20** 周期半波余弦脉冲信号的 FS 分析。

**解** 图 3.20 示出了以半波余弦窗函数  $E \cos(\omega_1 t) G_{T/2}(t)$  为基周期、周期为  $T$  的周期半波余弦脉冲信号，显然有

$$f_{\text{半波}}(t) = \cos(\omega_1 t) f_{\text{方波}}(t)$$

把式 (3.66) 代入上式后，有

$$\begin{aligned} f_{\text{半波}}(t) &= \frac{E}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{E}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} [\cos(2(m-1)\omega_1 t) + \cos(2m\omega_1 t)] \\ &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{2E}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} \cos(2m\omega_1 t) \end{aligned} \quad (3.69)$$

这表明，周期半波余弦脉冲信号只有直流分量、基波余弦分量和偶次余弦分量，并且谐波幅度呈倒数平方衰减规律。

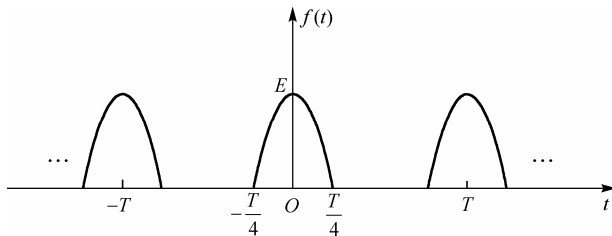


图 3.20 周期半波余弦脉冲信号

**例 3.21** 周期全波余弦脉冲信号的 FS 分析。

**解** 图 3.21 示出了以全波余弦窗函数  $E |\cos(\omega_1 t)| G_T(t)$  为基周期的周期全波余弦脉冲信号，显然有

$$f_{\text{全波}}(t) = 2f_{\text{半波}}(t) - E \cos(\omega_1 t)$$

把式 (3.69) 代入式 (3.67) 后，有

$$f_{\text{全波}}(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} \frac{\cos(2m\omega_1 t)}{4m^2-1} \right]$$

这表明，周期全波余弦脉冲信号只有直流分量和偶次余弦分量，这些分量的幅度都是半波的两倍，并且半波中存在的基波分量已不复存在。这是因为周期全波信号的实际周期已减为周期半波信号周期的一半。

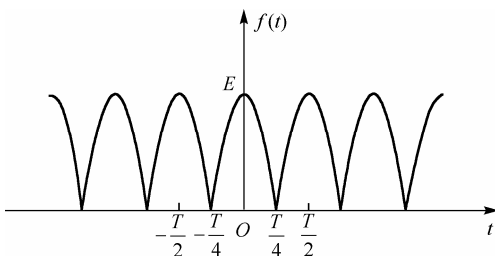


图 3.21 周期全波余弦脉冲信号

**例 3.22** 导通角为  $2\theta$  的周期余弦脉冲波的 FS 分析。

**解** 如图 3.22 所示, 幅度为  $E$ 、导通角为  $2\theta$  的余弦脉冲波的表达式是

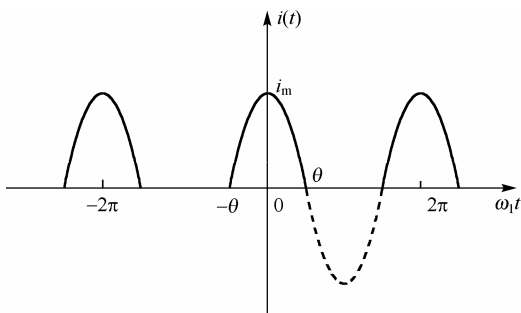
$$E[\cos(\omega_1 t) - \cos\theta]G_\tau(t)$$

其中,  $\cos\left(\frac{\omega_1 \tau}{2}\right) = \cos\theta$ , 则  $\frac{\tau}{T} = \frac{\theta}{\pi}$  ( $\theta < \pi/2$ )。以它为基周期的周期余弦脉冲波是高频丙类功率放大电路中使用的输出电流波形。

显然有  $f_\theta(t) = [\cos(\omega_1 t) - \cos\theta]f_{\text{矩形}}(t)$

把式 (3.65) 代入上式后, 有

$$\begin{aligned} f_\theta(t) &= \frac{\theta}{\pi} E [\cos(\omega_1 t) - \cos\theta] \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \text{Sa}(m\theta) \cos(m\omega_1 t) \right] \\ &= \frac{E}{\pi} \left[ (\sin\theta - \theta \cos\theta) + (\theta - \sin\theta \cos\theta) \cos(\omega_1 t) + \right. \\ &\quad \left. 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos\theta \sin(m\theta) - m \sin\theta \cos(m\theta)}{m(m^2 - 1)} \cos(m\omega_1 t) \right] \end{aligned}$$

图 3.22 导通角为  $2\theta$  的周期余弦脉冲波

### 3.3.4 对称性与FS系数的关系

当实信号  $f(t)$  满足某对称性时, 其 FS 展开式中的有些项就不会出现, 致使展开式相对简单。信号对称性分为对整周期而言的偶函数和奇函数, 以及对半周期而言的奇谐函数和偶谐函数。

当周期信号  $f(t)$  为实偶函数时, 其频谱为实偶函数, 因此  $F_n = F_n^* = \text{实数}$ , 使得  $b_n = 0$ ,

因此 FS 展开式中无正弦项。这是很容易理解的, 因为实偶信号中不可能含有具有奇对称性的正弦分量。

同理, 周期信号  $f(t)$  为实奇函数时, 其频谱为虚奇函数, 因此  $F_n = -F_n^*$  是虚数, 使得  $a_n = 0$ , 因此 FS 展开式中无直流项, 也无余弦项。这是因为实奇信号中不可能含有具有偶对称性的直流和余弦分量。

例如, 周期矩形脉冲信号、周期三角脉冲信号、周期半波余弦脉冲信号、周期全波余弦脉冲信号和导通角为  $2\theta$  的周期余弦脉冲波都是偶对称, 它们都只含有直流分量和余弦分量, 而周期锯齿脉冲信号奇对称, 它只含有正弦分量。

周期信号  $f(t)$  满足  $f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$  时,  $f_1(t) = -f_1\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$  使得  $F_1(\omega) = -F_1(\omega)e^{\pm j\omega T/2}$ , 这样  $F_n = -F_n e^{-jn\pi}$ , 从而有  $F_{2m} = 0$ , 这意味着周期信号  $f(t)$  无直流分量和偶次谐波分量, 仅含有奇次谐波分量。因此, 我们把它称为奇谐信号。

同理, 周期信号  $f(t)$  满足  $f(t) = f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$  时,  $f_1(t) = f_1\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$  使得  $F_1(\omega) = F_1(\omega)e^{\pm j\omega T/2}$ , 这样  $F_n = F_n e^{jn\pi}$ , 从而有  $F_{2m-1} = 0$ , 这意味着周期信号  $f(t)$  无奇次谐波分量, 仅含有偶次谐波分量。因此, 我们把它称为偶谐信号。需要指出的是, 实际上具有偶谐特性的信号周期已经减半, 从而使基频加倍, 当然就没有奇次谐波分量了。

例如, 周期方波信号具有偶对称性和奇谐对称性, 它只含有直流分量和奇次余弦分量, 而周期全波余弦脉冲信号具有偶对称性和偶谐对称性, 它只含有直流分量和偶次余弦分量。

### 3.4 采样信号的傅里叶变换

#### 3.4.1 时域采样信号的傅里叶变换(傅里叶变换的时域采样性质——时域采样与频域周期叠加)

连续信号  $f(t)$  经理想均匀采样后得到的采样信号可表示为

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (3.70)$$

式中,  $T_s$  为采样周期(即采样间隔), 采样频率  $f_s = 1/T_s$ 。

由傅里叶变换的频域卷积定理和式(3.57)可知, 采样信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * [\omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)] = f_s F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s) = f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (3.71)$$

式中, 已利用了冲激函数的卷积性质。上式表述了下述的傅里叶变换时域采样性质:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \Leftrightarrow f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad (3.72)$$

即时域采样引起了频域的周期重复与叠加, 并且采样信号(即对应的离散信号)与周期谱互相对应。

### 3.4.2 带限信号的时域采样定理——奈奎斯特(Nyquist)采样定理

当连续信号  $f(t)$  为有限带宽信号[如图 3.23 (a) 所示, 其频谱满足带限条件: 当  $|\omega| > \omega_m$  时,  $F(\omega) = 0$ , 其中  $\omega_m$  为信号的最高频率]时, 只要使采样频率不小于信号的奈奎斯特采样频率  $\omega_{\text{Neq}} = 2\omega_m$  (对应的采样间隔称为奈奎斯特采样间隔  $T_{\text{Neq}}, T_{\text{Neq}} = 2\pi/\omega_{\text{Neq}}$ ), 即  $\omega_s \geq 2\omega_m$ , 则从图 3.23 (b) 可见, 信号频谱只发生周期延拓而成为周期频谱, 不发生频域混叠, 此时, 该周期频谱的基周期是原信号的频谱。并且从图 3.23 (b) 可见, 只要把采样信号通过截止频率为  $\omega_s/2$  的理想低通滤波器

$$h_{\text{LPF}}(t) = \text{Sa}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) \Leftrightarrow H_{\text{LPF}}(\omega) = T_s G_{\omega_s}(\omega) \quad (3.73)$$

就可无失真地复原原始的连续信号。因为当  $\omega_s \geq 2\omega_m$  时, 有

$$H_{\text{LPF}}(\omega)F_s(\omega) = H_{\text{LPF}}(\omega)\left[f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_s)\right] = F(\omega) \quad (3.74)$$

这导致

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Sa}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_s)\text{Sa}\left(\frac{\omega_s(t - nT_s)}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

式 (3.75) 表示, 带限信号可以从它的等间隔(此采样间隔要不大于奈奎斯特采样间隔)采样值唯一地无失真复原。相反, 如果采样间隔不大于奈奎斯特采样间隔这一条件未被满足, 则一定会出现如图 3.23 (c) 所示的频域混叠, 即频谱周期重复后, 在叠加时发生重叠频段的频谱混叠, 使得不可能从信号的样本值无失真地复原原始信号。这些就是奈奎斯特采样定理要表述的内容。

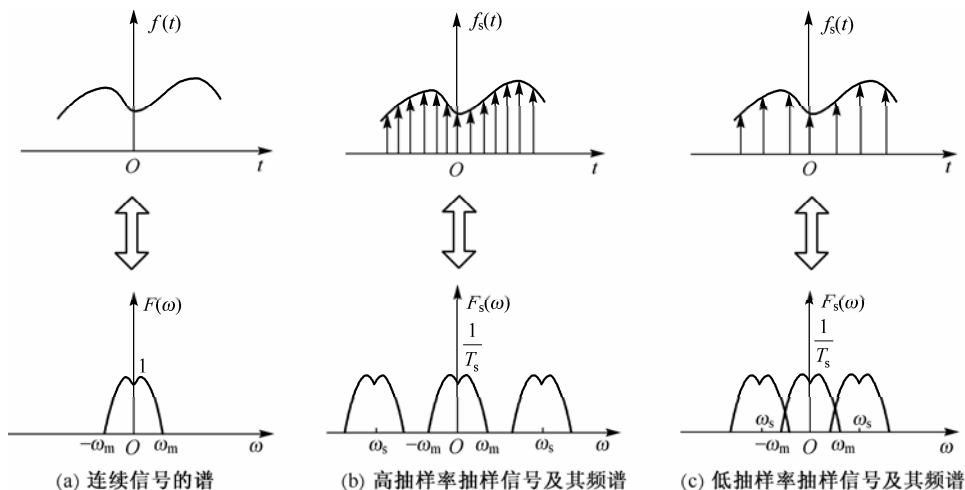


图 3.23 时域采样定理的图示

式(3.75)表明, 当采样定理被满足时, 带限信号  $f(t)$  可展开成抽样函数(Sa 函数)的无穷级数, 在用幅值等于  $f(nT_s)$  的 Sa 函数内插后, 从信号的离散样本集合  $\{f(nT_s)\}$  可无失真地复原出原始的被时域采样的信号, 如图 3.24 所示。

图 3.24 的上半部分和下半部分分别示出了在频域里和在时域里如何通过理想低通滤波从采样信号复原连续信号。

信号经过运算后, 最高频率可能发生变化, 从而导致奈奎斯特采样频率发生变化。例如, 两信号相加后, 最高频率要取原先的两个最高频率的最大值; 相反, 两信号卷积后, 最高频率要取原先的两个最高频率的最小值; 两信号相乘后, 会产生频域卷积, 使得最高频率要取原先的两个最高频率的和; 信号  $n$  次方后, 最高频率要取原先的最高频率的  $n$  倍; 尺度运算  $f(at)$  的最高频率要取  $f(t)$  的最高频率的  $|a|$  倍。

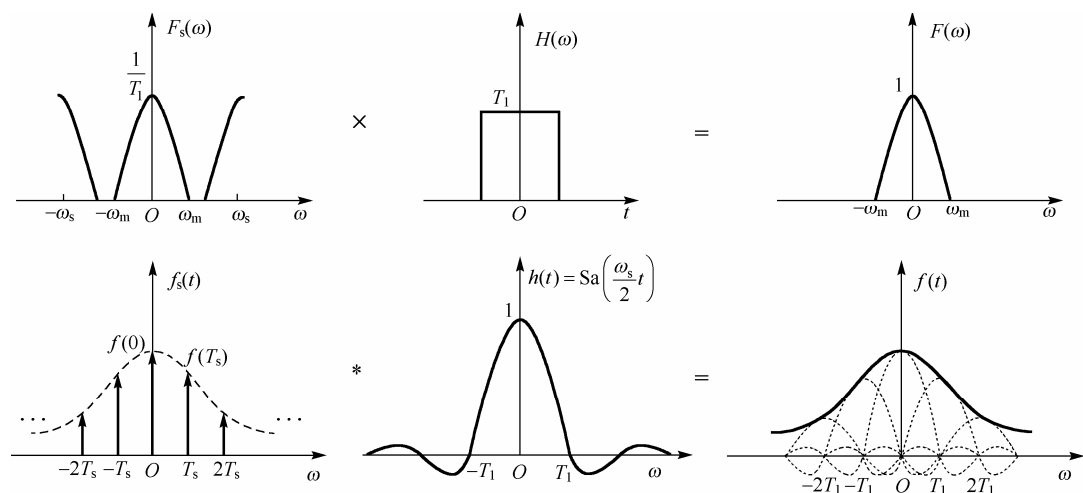


图 3.24 从采样信号无失真复原连续信号

**例 3.23** 已知带限信号  $f(t)$  的最高频率为 100 Hz, 若对下列信号进行时域采样, 求最低采样频率  $f_s$ 。

- (1)  $f(3t)$ , (2)  $f^2(t)$ , (3)  $f(t) * f(2t)$ , (4)  $f(t) + f^2(t)$

**解** (1) 由于  $f(3t)$  是把信号在时域压缩 3 倍, 因此频谱扩展 3 倍, 使  $f(3t)$  的最高频率为 300 Hz, 这样, 由时域采样定理可知,  $f_{s1} = 600$  Hz。

(2) 根据三角函数的倍角公式可得出  $f^2(t)$  的频带为  $f(t)$  频带的两倍, 所以, 由时域采样定理可知,  $f_{s2} = 400$  Hz。

(3) 从与 (1) 相同的论述可知,  $f(2t)$  的频带也为  $f(t)$  频带的两倍, 使得信号  $f(t) * f(2t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} F(\omega) F\left(\frac{\omega}{2}\right)$  的频带与  $f(t)$  的频带相同, 所以  $f_{s3} = 200$  Hz。

(4)  $f^2(t)$  的频带为  $f(t)$  的两倍, 使得  $f(t) + f^2(t)$  的频带也为  $f(t)$  频带的两倍, 所以  $f_{s4} = 400$  Hz。

### 3.4.3 矩形脉冲采样\*

冲激采样实际上很难实现, 在实践中我们总是使用周期脉冲对信号进行采样, 其中最常用的是矩形脉冲采样。此时, 式 (3.70) 可改写为

$$f_s(t) = f(t)p_T(t) \quad (3.76)$$

其中幅度为  $E$ 、宽度为  $\tau$ 、周期为  $T_s$  的周期矩形信号有傅里叶级数展开式

$$p(t) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right) e^{jn\omega_s t}$$

使得其频谱为

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right) \delta(\omega - n\omega_s)$$

于是, 由频域卷积定理有

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = f_s E\tau \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right) F(\omega - n\omega_s) \quad (3.77)$$

此时, 在  $F(\omega)$  周期重复时, 幅度以  $\text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right)$  衰减, 如图 3.25 所示。

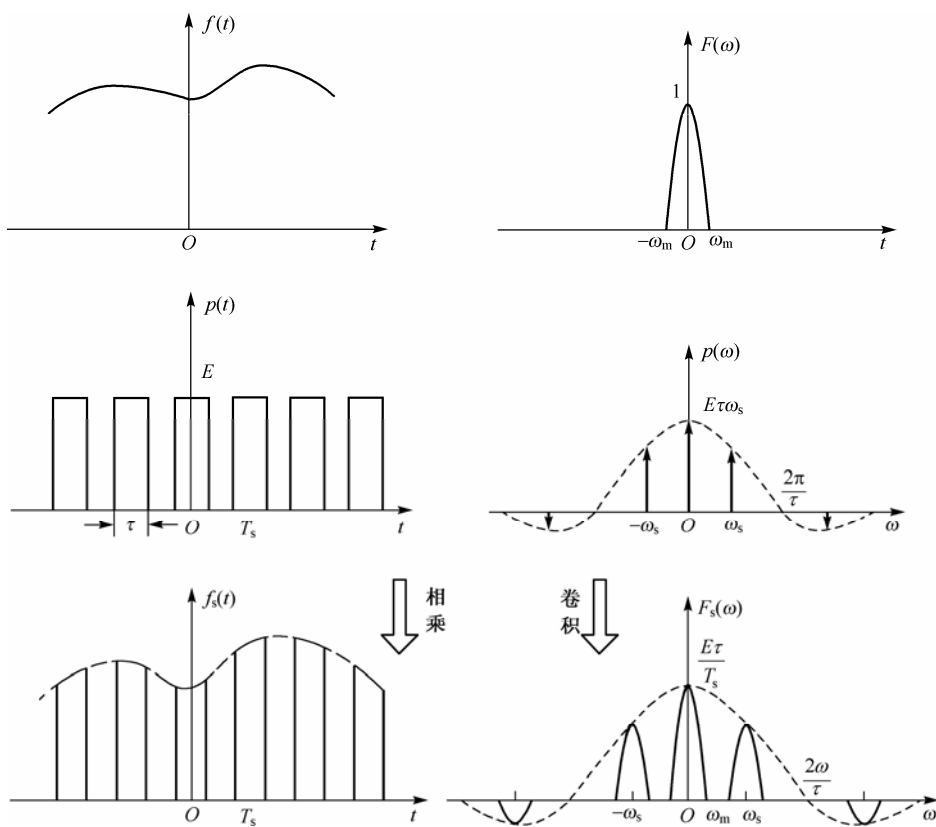


图 3.25 矩形脉冲采样信号的频谱

容易理解当采样频率满足采样定理要求时,复原过程仍可用理想低通滤波进行,式(3.75)仍然有效,只要  $E\tau=1$ 。

### 3.4.4 频域采样信号的傅里叶逆变换(傅里叶变换的频域采样性质)\*

连续频谱  $F(\omega)$  经理想均匀采样后得到的采样频谱可表示为

$$F_s(\omega) = F(\omega)\delta_{\omega_s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_s)\delta(\omega - n\omega_s) \quad (3.78)$$

式中,  $\omega_s$  为频率采样间隔,相应的时域周期为  $T_s = 2\pi/\omega_s$ 。

由傅里叶变换的时域卷积定理和式(3.57)可知,采样频谱的傅里叶逆变换为

$$f_{T_s}(t) = f(t) * \left[ \frac{1}{\omega_s} \delta_{T_s}(t) \right] = \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_s) \quad (3.79)$$

其中,已利用了冲激函数的卷积性质,式(3.79)表述了下述的傅里叶变换频域采样性质:

$$\frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_s) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_s)\delta(\omega - n\omega_s) \quad (3.80)$$

即频域采样引起了时域周期重复与叠加。

### 3.4.5 时限信号的频域采样定理\*

当非周期连续信号  $f(t)$  为有限时宽信号[如图3.26(a)所示,当  $|t| > t_m$  时,  $f(t) = 0$ ,其中  $2t_m$  为信号具有的持续时间]时,只要使频率采样间隔  $f_s$  不大于信号持续时间的倒数,即  $f_s \leq 1/(2t_m)$  或  $T_s \geq 2t_m$ ,则由图3.26(b)可见,非周期信号只发生周期延拓,成为周期连续信号,而不发生时域混叠。此时,该周期信号的基周期是原信号,并且只要截取该周期信号的基周期,即把它乘以时宽为  $T_s$  的矩形窗  $\omega_s G_{T_s}(t)$ ,就可无失真地复原原始信号的连续频谱。因为当  $T_s \geq 2t_m$  时,由式(3.79)有

$$\omega_s G_{T_s}(t) f_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{T_s}(t) f(t - nT_s) = f(t)$$

使得

$$\text{Sa}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_s)\delta(\omega - n\omega_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_s) \text{Sa}\left(\frac{T_s(\omega - n\omega_s)}{2}\right) = F(\omega) \quad (3.81)$$



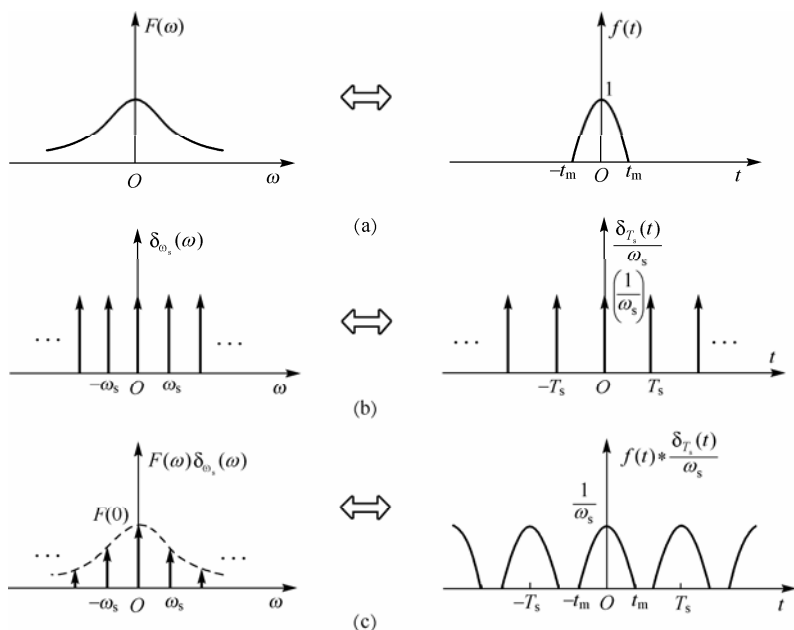


图 3.26 频域采样

式(3.81)表示,时限信号的频谱可以从它的等间隔(频率采样间隔要足够小)采样值唯一地无失真复原。相反,如果频率采样间隔足够小这一条件未被满足,则一定会出现时域混叠,使得不可能从信号频谱的样本值无失真地复原出原始信号的频谱。这些就是频域采样定理要表述的内容。

显然,频域采样定理与时域采样定理对偶。

需指出的是,周期连续信号的离散谱和傅里叶级数展开实质上就是用等于基频的频率采样间隔对时限信号进行等间隔频域采样的结果。

## 3.5 LTI系统的频域分析

### 3.5.1 系统传递函数

#### 1. 基本关系

具有频谱  $F(\omega)$  的信号  $f(t)$  通过冲激响应为  $h(t)$  的 LTI 系统时,输出响应为

$$y(t) = f(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (3.82)$$

式中,系统传递函数  $H(\omega)$  (又称为频率响应或频率特性)是冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换。

#### 2. 正弦信号通过LTI系统

当输入信号为  $f(t) = \cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$  时,输出频谱为

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= \pi H(\omega) (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) \\
 &= \pi (H(-\omega_0) \delta(\omega + \omega_0) + H(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0)) \\
 &= \pi |H(\omega_0)| \left\{ \cos(\varphi(\omega_0)) [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] + \right. \\
 &\quad \left. j \sin(\varphi(\omega_0)) [-\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \right\}
 \end{aligned}$$

可知输出信号为

$$y(t) = |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (3.83)$$

这表明, 角频率为  $\omega_0$  的正弦信号通过 LTI 系统后, 输出信号仍为同一角频率的正弦信号, 变化仅在于: 幅度乘以幅度传递函数  $|H(\omega)|$  (又称为幅频特性) 在  $\omega_0$  处的值  $|H(\omega_0)|$ , 相位增加相位传递函数  $\varphi(\omega)$  (又称为相频特性) 在  $\omega_0$  处的值  $\varphi(\omega_0)$ 。这意味着, 正弦信号能形状不变地通过 LTI 系统, 因此它是 LTI 系统的特征信号。

### 3. 周期信号通过LTI系统

由于周期信号有 FS 展开式  $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ , 因此它通过 LTI 系统的输出为

$$y(t) = c_0 H(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n |H(n\omega_1)| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n + \varphi(n\omega_1)) \quad (3.84)$$

通过恰当选择系统传递函数的滤波特性, 就能在抑制输入信号中的某些不想要的频率分量 (即杂波和干扰) 的同时, 增强输入信号中的那些需要输出的信号分量。这就是得到广泛应用的滤波器的原理。

**例3.24** 已知一低通滤波器的幅度传递函数如图3.27(a)所示, 它具有零相移的相频特性, 如果输入信号  $f(t)$  为图3.27(b)所示并且  $T=1$  的锯齿波, 求输出信号  $y(t)$ 。

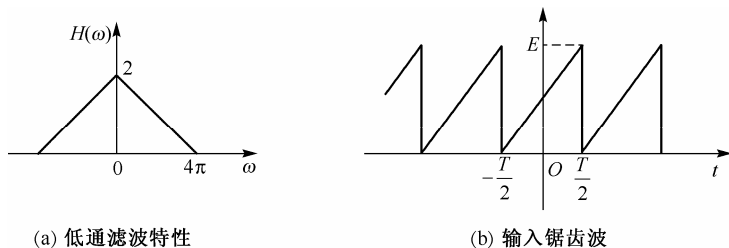


图 3.27 锯齿波通过低通滤波器

**解** 因为  $\omega_1 = 2\pi/T = 2\pi$ , 由它和图 3.27 可知, 输出信号仅剩有直流分量和基波分量, 所示锯齿波的直流分量为  $E/2$ , 而其基波分量为  $\frac{E}{\pi} \sin(2\pi t)$ , 所以由式 (3.84) 可知

$$y(t) = E \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \right]$$

### 4. 因果正弦信号通过LTI系统

**定理:** 当因果复正弦信号  $f(t) = e^{j\omega_0 t} u(t)$  激励系统传递函数为  $H(\omega)$  的 LTI 系统时, 系统

稳态响应为  $y_{\text{st}}(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}u(t)$ 。

**证明：**显然，当  $H(\omega_0) = 0$  时，结论成立。因此，可设  $H(\omega_0) \neq 0$ 。此时，从复调制定理可知， $F(\omega) = U(\omega - \omega_0)$ ，其中  $U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$  是阶跃信号  $u(t)$  的傅里叶变换；并由时域卷积定理可知，输出频谱为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega)U(\omega - \omega_0) = H(\omega_0)\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{H(\omega)}{j(\omega - \omega_0)} \\ &= H(\omega_0)U(\omega - \omega_0) + \frac{H(\omega) - H(\omega_0)}{j(\omega - \omega_0)} \end{aligned}$$

使得输出稳态响应为

$$Y_{\text{st}}(\omega) = H(\omega_0)U(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow y_{\text{st}}(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}u(t) \quad (3.85)$$

输出暂态响应的频谱为

$$Y_{\text{temp}}(\omega) = \frac{H(\omega) - H(\omega_0)}{j(\omega - \omega_0)} \quad (3.86)$$

显然，暂态响应是系统特征分量的加权和。

**推论 1：**当因果正弦信号  $f(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)u(t)$  激励系统传递函数为  $H(\omega)$  的 LTI 系统时，系统稳态响应为

$$y_{\text{st}}(t) = A|H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \theta + \varphi(\omega_0))u(t) \quad (3.87)$$

### 5. 因果周期信号通过LTI系统

**推论 2：**当因果周期信号  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}u(t)$  激励系统传递函数为  $H(\omega)$  的 LTI 系统时，系统稳态响应为

$$y_{\text{st}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n H(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}u(t) \quad (3.88)$$

用傅里叶级数展开周期信号  $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$ ，它经因果化后得到的因果周期信号

$$f(t) = f_T(t)u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}u(t), \text{ 由定理可知推论 2 成立。}$$

由上述分析可知，用频域分析求解系统的稳态响应十分方便。

### 3.5.2 系统功能分析

频域分析不仅可用来分析周期信号通过 LTI 系统的响应，而且可用来分析系统的功能，并理解信号在通过一个大系统的各个功能部件或子系统后，信号频谱发生的变化。

#### 例 3.25 倒频器

为使通信保密，可使用倒频器(Scrambler)对信号进行倒频后发送，再在接收端进行逆倒频。图3.28(b)示出了一个倒频系统，如果输入带限信号  $f(t)$  的频谱  $F(\omega)$  如图3.28(a)所示，

其最高频率为  $\omega_m$ ；已知调制频率  $\omega_0 > \omega_m$ ；图 3.28(b) 中的 HPF 为截止角频率等于  $\omega_0$  的理想

高通滤波器  $H_1(\omega) = \begin{cases} K_1 & |\omega| > \omega_0 \\ 0 & \omega \end{cases}$ ，LPF 为截止角频率等于  $\omega_m$  的理想低通滤波器

$H_2(\omega) = \begin{cases} K_2 & |\omega| < \omega_m \\ 0 & \omega \end{cases}$ 。要求画出  $x(t)$  和  $y(t)$  的频谱图。

**解** 由傅里叶变换的调制定理可知， $f_1(t)$  的频谱为

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0)$$

由于  $F(\omega)$  带限于  $\omega_m$ ，并且  $\omega_0 > \omega_m$ ，所以， $F_1(\omega)$  带限于  $[\omega_0 - \omega_m, \omega_0 + \omega_m]$ ，如图 3.28(c) 所示。

截止角频率为  $\omega_0$  的 HPF 的高通特性使得其输出  $x(t)$  的频谱  $X(\omega)$  带限于  $[\omega_0, \omega_0 + \omega_m]$ ，如图 3.28(d) 所示。

再次由傅里叶变换的调制定理可知， $f_2(t)$  的频谱为

$$F_2(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega + (\omega_0 + \omega_m)) + \frac{1}{2}X(\omega - (\omega_0 + \omega_m))$$

如图 3.28(e) 所示，它带限于  $[0, \omega_m]$  [在此区间信号频谱  $F(\omega)$  的形状已被倒转] 和  $[2\omega_0 + \omega_m, 2(\omega_0 + \omega_m)]$ 。

经截止角频率等于  $\omega_m$  的 LPF 滤除位于高频段的频谱分量后，就得到如图 3.28(f) 所示的  $y(t)$  的频谱  $Y(\omega)$ 。它是输入信号频谱  $F(\omega)$  的倒转。

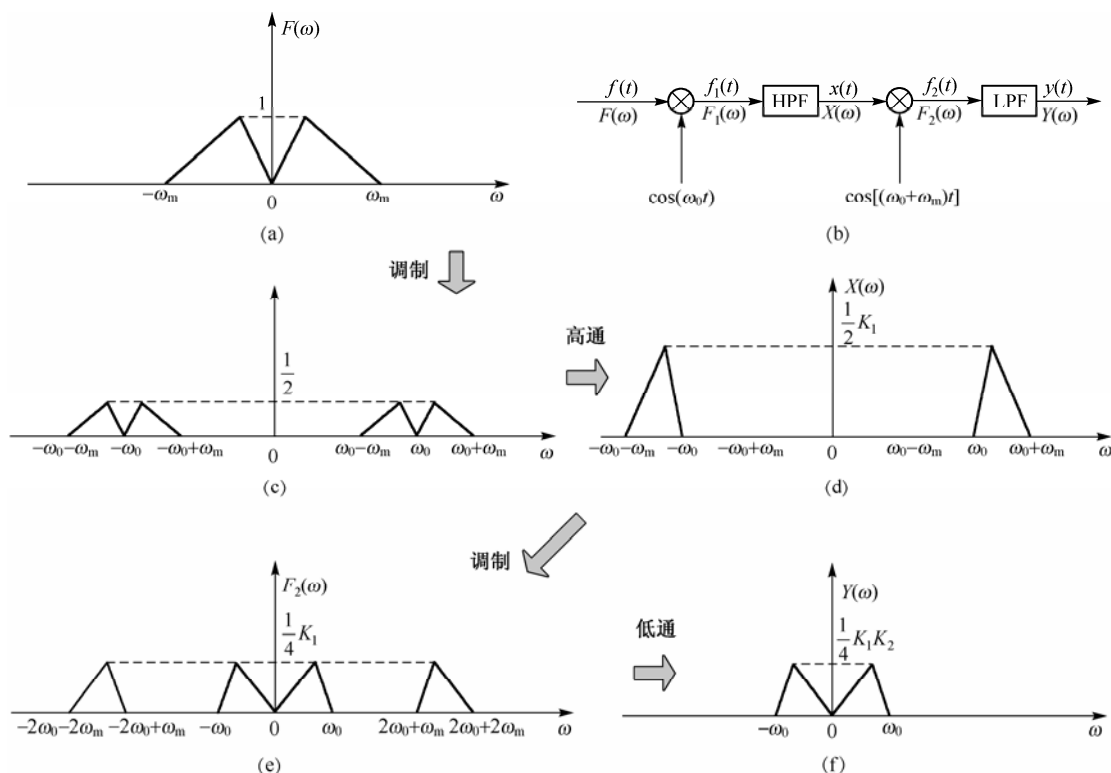


图 3.28 倒频器

**例 3.26 单边带调制器**

图3.29(a)示出了一个单边带调制器, 如果输入带限信号  $f(t)$  的频谱  $F(\omega)$  如图3.29(b)所示, 其最高频率为  $\omega_m$ ; 已知调制频率  $\omega_0 > \omega_m$ ; 图3.29(a)中的希尔伯特滤波器  $H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)$  为  $90^\circ$  度相移器。要求分析其工作原理, 并画出  $y(t)$  的频谱图。

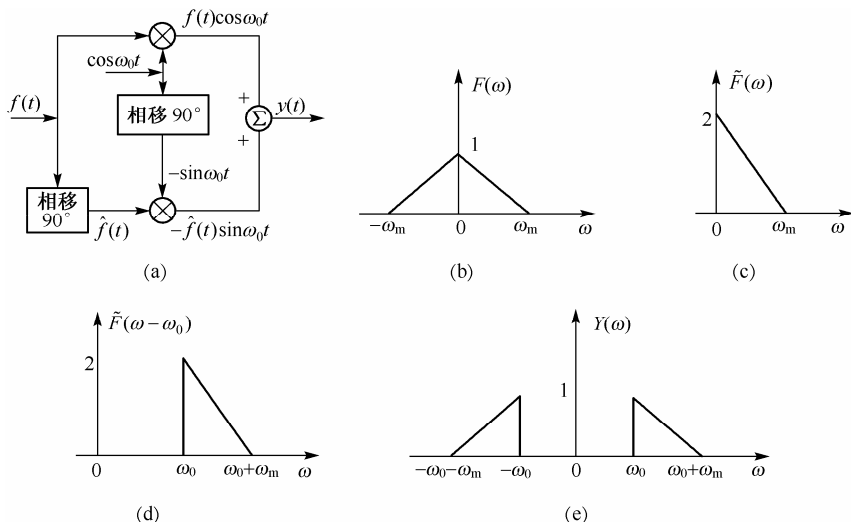


图 3.29 单边带调制器

**解** 希尔伯特滤波器的输出  $\hat{f}(t)$  的频谱为

$$\hat{F}(\omega) = H(\omega)F(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)F(\omega)$$

因为  $y(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) - \hat{f}(t)\sin(\omega_0 t)$ , 由调制定理可知

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2j} [\hat{F}(\omega + \omega_0) - \hat{F}(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] - \frac{1}{2} [\text{sgn}(\omega + \omega_0)F(\omega + \omega_0) - \text{sgn}(\omega - \omega_0)F(\omega - \omega_0)] \\ &= F(\omega + \omega_0)u(-\omega - \omega_0) + F(\omega - \omega_0)u(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

其中利用了事实:  $\frac{1}{2}(1 \pm \text{sgn}(x)) = u(\pm x)$ 。由于  $\omega_0 > \omega_m$ , 并且  $F(\omega)$  带限于  $\omega_m$ , 所以有如图3.29(e)所示的输出信号  $y(t)$  的频谱图  $Y(\omega)$ 。它带限于  $[\omega_0, \omega_0 + \omega_m]$ , 是输入信号频谱  $F(\omega)$  的单(上)边带调制谱。

实际上, 复信号  $\tilde{f}(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$  有如图 3.29(c)所示的单边谱:  $\tilde{F}(\omega) = (1 + \text{sgn}(\omega))F(\omega) = 2u(\omega)F(\omega)$ , 使得复调制信号  $\tilde{f}(t)e^{j\omega_0 t}$  有如图 3.29(d)所示的单边谱:  $\tilde{F}(\omega - \omega_0) = F(\omega) = 2u(\omega - \omega_0)F(\omega - \omega_0)$ , 这样, 输出信号  $y(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) - \hat{f}(t)\sin(\omega_0 t) = \text{Re}\{\tilde{f}(t)e^{j\omega_0 t}\}$  有如

图 3.29(e) 所示的单(上)边带调制谱  $Y(\omega) = u(-\omega - \omega_0)F(\omega + \omega_0) + u(\omega - \omega_0)F(\omega - \omega_0)$ 。

### 3.5.3 LTI电路和系统的频域特性分析

#### 1. LTI系统频域特性分析

##### (1) 从系统微分方程求解系统传递函数和冲激响应

使用傅里叶变换可方便地从系统微分方程求解系统传递函数和冲激响应, 其计算步骤是: 首先在输入激励为单位冲激的假设下, 利用傅里叶变换的微分定理对微分方程进行傅里叶变换, 并整理后得到系统传递函数  $H(\omega) = Y(\omega)$ , 最后取传递函数的傅里叶逆变换后, 就得到系统的冲激响应。下面用一个典型例子来说明此过程。

**例 3.27** 描述系统的微分方程为  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$ , 求其传递函数和冲激响应。

**解** 在假设  $e(t) = \delta(t) \Leftrightarrow 1$  的前提下, 取系统微分方程的傅里叶变换, 并利用傅里叶变换的时域微分定理, 有

$$(j\omega)^2 I(\omega) + 7j\omega I(\omega) + 10I(\omega) = (j\omega)^2 + 6j\omega + 4$$

使得

$$\begin{aligned} H(\omega) = I(\omega) &= \frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 10} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{j\omega + 5} - \frac{4}{j\omega + 2} \right) \Leftrightarrow h(t) = \delta(t) + \frac{1}{3} (e^{-5t} - 4e^{-2t}) u(t) \end{aligned}$$

##### (2) 从系统微分方程求解系统零状态响应

下面用一个例子来说明使用傅里叶变换从系统微分方程求解零状态响应的过程。

**例 3.28** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 5f(t)$ , 求系统在输入为  $f(t) = e^{-3t}u(t)$  下的零状态响应。

**解** 由于  $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$ , 取系统微分方程的傅里叶变换, 并利用傅里叶变换的时域微分定理, 有

$$(j\omega)^2 Y(\omega) + 3j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = \frac{2j\omega + 5}{j\omega + 3}$$

这使得系统的零状态响应的频谱为

$$Y_{zs}(\omega) = \frac{2j\omega + 5}{(j\omega + 3)[(j\omega)^2 + 3j\omega + 2]} = \frac{3/2}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1/2}{j\omega + 5}$$

则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \left[ \frac{3}{2}e^{-t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \right] u(t)$$

## 2. 傅里叶变换的因果时域微分性质

对表示因果时域微分性质的时域表示式[式(2.45)~式(2.47)]取傅里叶变换,就得到傅里叶变换的因果时域微分性质:

$$[y'(t)]_+ \Leftrightarrow j\omega Y(j\omega) - y(0_-) \quad (3.89)$$

$$[y''(t)]_+ \Leftrightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) - j\omega y(0_-) - y'(0_-) \quad (3.90)$$

$$[y^{(n)}(t)]_+ \Leftrightarrow (j\omega)^n Y(j\omega) - (j\omega)^{n-1} y(0_-) - (j\omega)^{n-2} y'(0_-) - \cdots - y^{(n-1)}(0_-) \quad (3.91)$$

式中,  $[y(t)]_+ \Leftrightarrow Y(j\omega)$ 。该性质不同于傅里叶变换的非因果时域微分性质之处是,考虑了因果化时初始条件的影响,因此,它可有效地用于从带有非零初始条件的微分方程求解系统的零输入响应、零状态响应和全响应。下面举一个例子来说明其过程。

(1) 从带有初始条件的微分方程求解系统零状态响应、零输入响应和全响应

**例 3.29** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 5f(t)$ , 已知初始条件为  $y(0_-) = 2$  和  $y'(0_-) = 1$ , 输入为  $f(t) = e^{-3t}u(t)$ , 求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

**解** 由于  $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$ , 取系统微分方程的傅里叶变换, 并利用傅里叶变换的因果时域微分性质, 有

$$(j\omega)^2 Y(\omega) - 2j\omega - 1 + 3j\omega Y(\omega) - 6 + 2Y(\omega) = \frac{2j\omega + 5}{j\omega + 3}$$

这使得系统输出频谱为

$$Y(\omega) = Y_{zi}(\omega) + Y_{zs}(\omega)$$

其中,

$$Y_{zs}(\omega) = \frac{2j\omega + 5}{(j\omega + 3)[(j\omega)^2 + 3j\omega + 2]} = \frac{3/2}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1/2}{j\omega + 5}$$

并且

$$Y_{zi}(\omega) = \frac{2j\omega + 7}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} = \frac{5}{j\omega + 1} - \frac{3}{j\omega + 2}$$

由此可得零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \left[ \frac{3}{2}e^{-t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

零输入响应为

$$y_{zi}(t) = [5e^{-t} - 3e^{-2t}] u(t)$$

因此系统全响应为

$$y(t) = \left[ \frac{13}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

(2) 从带非因果激励的微分方程求解系统零状态响应、零输入响应和全响应

傅里叶变换的(非因果)时域微分性质可有效地用于从微分方程求解系统的零输入响应、零状态响应和全响应。下面举一个例子来说明其过程。

**例 3.30** 描述系统的微分方程为  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$ ，求由激励  $e(t) = 4u(t) + 2u(-t)$  产生的零状态响应、零输入响应和全响应。

**解** 我们把输入信号  $e(t)$  分解为因果分量  $e_+(t) = 4u(t)$  和反因果分量  $e_-(t) = 2u(-t)$  之和，则在  $-\infty$  时刻必然处于的零初始条件下，由因果分量产生的系统响应就是系统的零状态响应，由反因果分量产生的系统响应的因果分量就是系统的零输入响应，而由输入信号  $e(t)$  产生的系统响应的因果分量就是系统的全响应。因此，

(1) 当  $e_+(t) = 4u(t) \Leftrightarrow 4\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$  时，取系统微分方程的傅里叶变换，并利用傅里叶变换的时域微分定理，有

$$(j\omega)^2 I(\omega) + 7j\omega I(\omega) + 10I(\omega) = 4\left[(j\omega)^2 + 6j\omega + 4\right]\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

这使得系统输出频谱为

$$\begin{aligned} I(\omega) &= 4\left[\frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 4}{j\omega((j\omega)^2 + 7j\omega + 10)} + \frac{4}{10}\pi\delta(\omega)\right] \\ &= \frac{8/3}{j\omega + 2} - \frac{4/15}{j\omega + 5} + \frac{8}{5}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) \end{aligned}$$

取其傅里叶逆变换后，可得系统的零状态响应为

$$i_{zs}(t) = \left[\frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5}\right]u(t)$$

(2) 由傅里叶变换的时域翻转性质可知，当  $e_-(t) = 2u(-t) \Leftrightarrow 2\left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right]$  时，取系统微分方程的傅里叶变换，并利用傅里叶变换的时域微分定理，有

$$(j\omega)^2 I(\omega) + 7j\omega I(\omega) + 10I(\omega) = 2\left[(j\omega)^2 + 6j\omega + 4\right]\left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right]$$

这使得系统输出频谱为

$$\begin{aligned} I(\omega) &= 2\left[-\frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 4}{j\omega((j\omega)^2 + 7j\omega + 10)} + \frac{4}{10}\pi\delta(\omega)\right] \\ &= -\frac{4/3}{j\omega + 2} + \frac{2/15}{j\omega + 5} + \frac{4}{5}\left(\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right) \end{aligned}$$

取其傅里叶逆变换后，可得系统的零输入响应为

$$i_{zi}(t) = \left[-\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t}\right]u(t) + \frac{4}{5}u(-t)$$



由于仅考虑  $t > 0$  时的零输入响应, 所以有

$$i_{zi}(t) = \left[ -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t} \right] u(t)$$

(3) 系统全响应  $i(t) = i_{zs}(t) + i_{zi}(t)$ , 把  $i_{zs}(t)$  和  $i_{zi}(t)$  代入, 即可得到  $i(t)$ 。

但是, 如果本题只要计算全响应, 则可用如下简便方法。首先分解输入信号为直流分量叠加一个因果分量, 即使输入信号  $e(t) = 2 + 2u(t) \Leftrightarrow 2 \left[ 3\pi(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$ , 然后计算此输入信号下的零状态响应, 它就是系统的全响应。具体地, 取系统微分方程的傅里叶变换, 并利用傅里叶变换的时域微分定理, 有

$$(j\omega)^2 I(\omega) + 7j\omega I(\omega) + 10I(\omega) = 2 \left[ (j\omega)^2 + 6j\omega + 4 \right] \left( 3\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right)$$

这使得系统的输出频谱为

$$\begin{aligned} I(\omega) &= 2 \left[ \frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 4}{j\omega((j\omega)^2 + 7j\omega + 10)} + \frac{12}{10} \pi\delta(\omega) \right] \\ &= \frac{4/3}{j\omega + 2} - \frac{2/15}{j\omega + 5} + \frac{4}{5} \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) + \frac{8}{5} \pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

取其傅里叶逆变换后, 可知系统全响应为

$$i(t) = \left[ \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{4}{5} \right] u(t) + \frac{4}{5}$$

当  $t > 0$  时, 可得

$$i(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5}$$

用傅里叶变换计算的结果与2.1节所述的时域分析得出的结果完全相同, 但运算要简便得多, 因为它只牵涉到傅里叶变换、代数运算和傅里叶逆变换。

### 3. 电路频域特性分析

使用傅里叶变换可以直接在频域分析线性电路的特性, 而无需建立其微分方程, 这很便于实际电路的分析计算, 而且物理意义清晰。

#### (1) 典型元件的阻抗

元件的阻抗  $Z(\omega)$  定义为其端电压  $u(t)$  的傅里叶变换  $U(\omega)$  与流过的电流  $i(t)$  的傅里叶变换  $I(\omega)$  的比值, 即

$$Z(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} \quad (3.92)$$

可以认为, 阻抗就是以流过元件的电流为激励、以元件端电压为响应的系统的传递函数。根据此定义, 容易证明电阻  $R$  的阻抗为  $R$ , 电容  $C$  的阻抗为  $\frac{1}{j\omega C}$ , 电感  $L$  的阻抗为  $j\omega L$ , 如

图 3.30 所示。

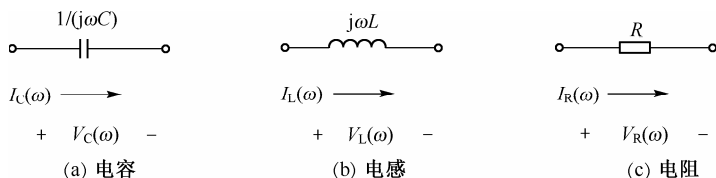


图 3.30 典型元件的阻抗

## (2) 线性电路的传递函数、幅频特性和相频特性

首先，使用电路中各元器件的频域表示，建立频域电路图；然后，使用频域 KCL，KVL 等电路定律建立联立的代数方程组；最后，从中得出所需的系统传递函数，并进而分析其幅频特性和相频特性等。

下面用一个典型例子来说明此分析过程。

**例 3.31** 计算图 3.31 (a) 所示的微分电路、图 3.32 (a) 所示的积分电路、图 3.33 (a) 所示的串并联选频电路和图 3.34 (a) 所示的纯相移网络的传递函数、幅频特性和相频特性。

**解** 由频域电路图，易有

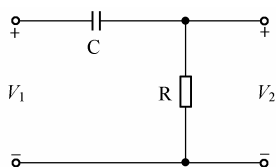
(a) 微分电路的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + (j\omega/\omega_0)}$$

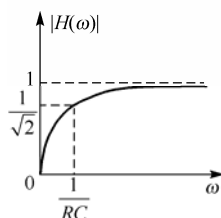
其中，特征频率  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ，相应的幅频特性为  $|H(\omega)| = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$ ，相频特性为

$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ 。特殊地， $|H(0)| = 0$ ， $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ ； $|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{4}$  和  $|H(+\infty)| = 1$ ， $\varphi(+\infty) = 0$ 。

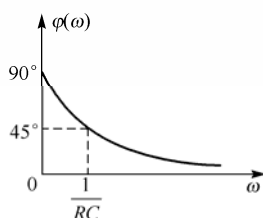
图 3.31 (b) 和 (c) 分别示出了其幅频特性和相频特性。从其幅频特性图 3.31 (b) 可见，微分电路是一个高通滤波器，并且  $\omega_0$  为它的截止频率；从其相频特性图 3.31 (c) 可见，相移量始终不小于零，因此它是一个相位超前网络，其相位超前量不大于  $90^\circ$ 。



(a) 微分电路



(b) 幅频特性



(c) 相频特性

图 3.31 微分电路及其频率特性

(b) 积分电路的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

其中，特征频率  $\omega_0 \triangleq \frac{1}{RC}$ ，相应的幅频特性为  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$ ，相频特性为

$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ 。特殊地， $|H(0)| = 1$ ， $\varphi(0) = 0$ ； $|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$  和

$|H(+\infty)| = 0$ ， $\varphi(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$ 。

图 3.32 (b) 和 (c) 示出了其幅频特性和相频特性。从其幅频特性图 3.32 (b) 可见，积分电路是一个低通滤波器，并且  $\omega_0$  为它的截止频率；从其相频特性图 3.32 (c) 可见，相移量始终不大于零，因此它是一个相位滞后网络，其相位滞后不大于  $90^\circ$ 。

(c) 图 3.33 (a) 所示的串并联选频电路的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{\frac{R}{1 + j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R}{1 + j\omega C}} = \frac{jx}{1 - x^2 + j3x}$$

其中， $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ ，特征频率  $\omega_0 \triangleq \frac{1}{RC}$ ；相应的幅频特性为  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{5 + (x + x^{-1})^2}}$ ，相频特性为

$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)$ 。特殊地， $|H(0)| = 0$ ， $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ ； $|H(\omega_0)| = \frac{1}{3}$ ， $\varphi(\omega_0) = 0$  和

$|H(+\infty)| = 0$ ， $\varphi(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$ 。

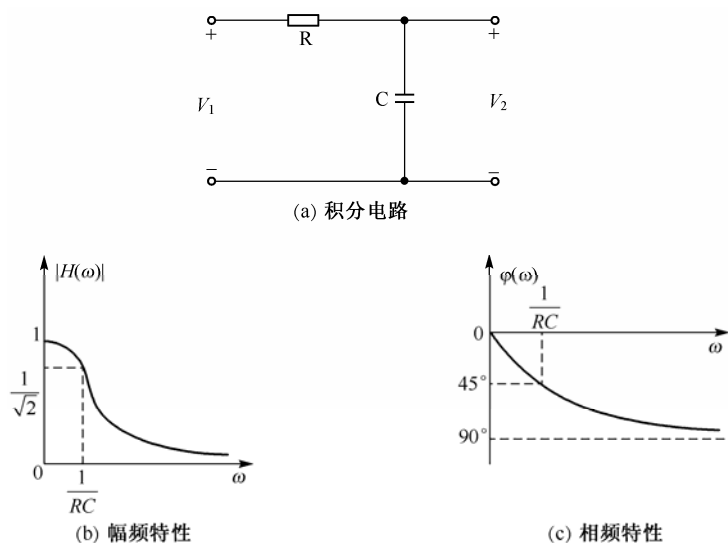


图 3.32 积分电路及其频率特性

图 3.33 (b) 和 (c) 示出了其幅频特性和相频特性。从其幅频特性图 3.33 (b) 可见，该电路是一个选频滤波器，并且  $\omega_0$  为它的中心谐振频率；从其相频特性图 3.33 (c) 可见，在中心谐振频率处相移为零，并且是一个递减函数。

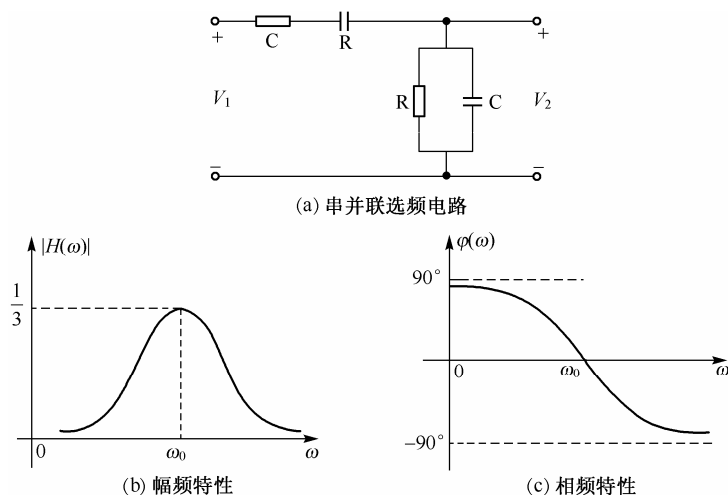


图 3.33 串并联选频电路及其频率特性

(d) 纯相移网络的参数满足阻抗匹配约束  $R = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{Z_1 Z_2}$ ，其中， $Z_1 = j\omega L$  和  $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ ，即负载阻抗等于 LC 电路的特性阻抗。此时，从负载往网络看的等效电源的开路电压源为

$$U_o(\omega) = V_1(\omega) \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

内阻为  $Z_o = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ 。所以，系统的频率特性为

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{U_o(\omega)R}{V_1(\omega)(Z_o + R)} = \frac{(Z_2 - Z_1)R}{(Z_1 + Z_2)R + 2Z_1Z_2} \\
 &= \frac{R - Z_1}{R + Z_1} = \frac{\omega_0 - j\omega}{\omega_0 + j\omega}
 \end{aligned}$$

相应的幅频特性为  $|H(\omega)|=1$ ，相频特性为  $\varphi(\omega)=-2\arctan(\omega/\omega_0)$ ，其中， $\omega_0=R/L=1/RC$ 。

特殊地， $\varphi(+\infty)=-\pi$ ， $\varphi(\omega_0)=-\frac{\pi}{2}$ 和 $\varphi(0)=0$ 。

图3.34 (b)和(c)示出了其幅频特性和相频特性。这表明，它是一个具有纯相移特性的全通滤波器。

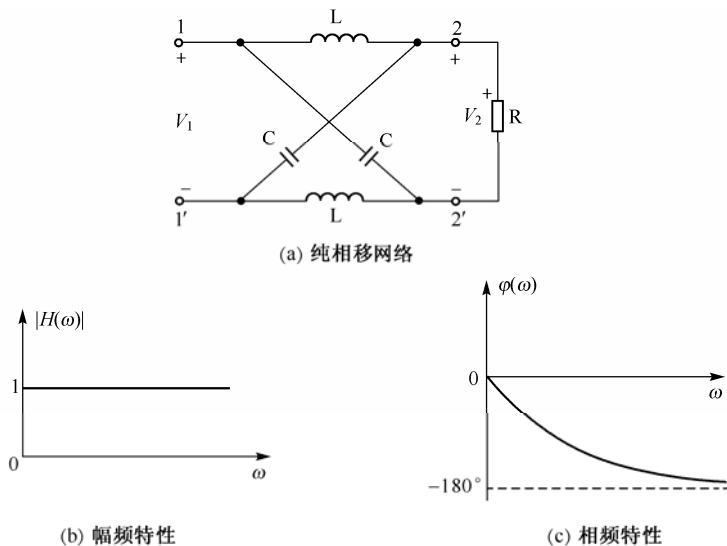


图 3.34 纯相移网络及其频率特性

### (3) 线性电路的响应

用频域分析计算线性电路，不但可确定系统的频域特性，也可建立描述系统的微分方程，并进而计算系统的零输入响应、零状态响应和全响应。下面用一例来说明求解过程。

**例 3.32** 计算图2.1 所示电路的以输入电压  $e(t)$  为激励、以输入电流  $i(t)$  为相应的系统传递函数，写出相应的系统微分方程，并计算由激励  $e(t)=4u(t)+2u(-t)$  产生的零状态响应、零输入响应和全响应。

**解** 该电路的频域零状态等效电路如图 3.35 所示，对它使用 KCL 和 KVL 后有

$$E(\omega) = I(\omega) \left[ R_1 + \frac{\frac{1}{j\omega C}(R_2 + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + (R_2 + j\omega L)} \right] = I(\omega) \left[ 1 + \frac{\frac{1}{j\omega} \left( \frac{3}{2} + \frac{j\omega}{4} \right)}{\frac{1}{j\omega} + \left( \frac{3}{2} + \frac{j\omega}{4} \right)} \right]$$

于是，系统传递函数为

$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{E(\omega)} = \frac{(j\omega)^2 + 6j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 7j\omega + 10}$$

它实际上是该电路的输入导纳。把它对角相乘后,有

$$(j\omega)^2 I(\omega) + 7j\omega I(\omega) + 10I(\omega) = (j\omega)^2 E(\omega) + 6j\omega E(\omega) + 4E(\omega)$$

取它的傅里叶逆变换,并利用傅里叶变换的时域微分定理,得系统微分方程为

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$$

依据此微分方程,用傅里叶变换计算系统零输入响应、零状态响应和全响应的过程参见例 3.30。

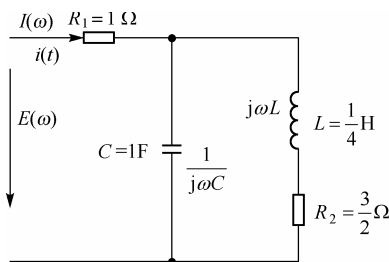


图 3.35 例 3.32 的图示

众所周知,频域分析对系统稳态响应的分析最有效,这是因为在  $-\infty$  时刻加入的  $f_-(t)$  造成的系统响应在观察时刻之后早已稳定。

实际上频域分析也可用来分析系统的暂态响应,下面用两例来说明。

#### (4) 线性电路对因果正弦信号的零状态响应

因果复正弦信号  $f(t) = e^{j\omega_0 t} u(t)$  激励  $H(\omega)$  的线性电路时,系统稳态响应和暂态响应分别由式 (3.85) 和式 (3.86) 给出。因为因果正弦信号和因果周期信号可分解为复正弦信号的加权,所以,可据此计算电路对因果正弦信号和因果周期信号的响应。下面用一例来说明求解线性电路对因果正弦信号的零状态响应过程。

**例 3.33** 求图 3.36(a) 所示 LR 串联电路以因果正弦电压  $u(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$  为输入信号、以回路电流为输出信号的零状态响应。

**解** 易知该电路的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{U(\omega)} = \frac{1}{j\omega L + R}$$

可知

$$|H(\omega_0)| = \frac{1}{R\sqrt{Q^2 + 1}} \quad \text{和} \quad \varphi(\omega_0) = -\arctan(Q)$$

其中,  $Q = \omega_0 L / R$  为电感的品质因数。由式 (3.87) 可知,电路的稳态响应为

$$i_{st}(t) = \frac{1}{R\sqrt{1 + Q^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan(Q)) u(t)$$

由式 (3.86) 可知,电路对  $e^{j\omega_0 t} u(t)$  的暂态响应为

$$\frac{H(\omega) - H(\omega_0)}{j(\omega - \omega_0)} = -\frac{1}{(j\omega_0 L + R) \left( j\omega + \frac{R}{L} \right)} \Leftrightarrow \frac{-1 + jQ}{R(1 + Q^2)} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

取虚部后,可得电路的暂态响应为

$$i_{\text{temp}}(t) = \frac{Q}{R(1+Q^2)} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

故输出电流为

$$i(t) = \frac{1}{(1+Q^2)R} \left[ \sqrt{1+Q^2} \sin(\omega_0 t - \arctan(Q_0)) + Q e^{-\frac{\omega_0 t}{Q_0}} \right] u(t)$$

图3.36(d), (c)和(b)分别示出了该电流及其暂态分量和稳态分量。由此可见, 暂态分量指数衰减地逐渐消失。

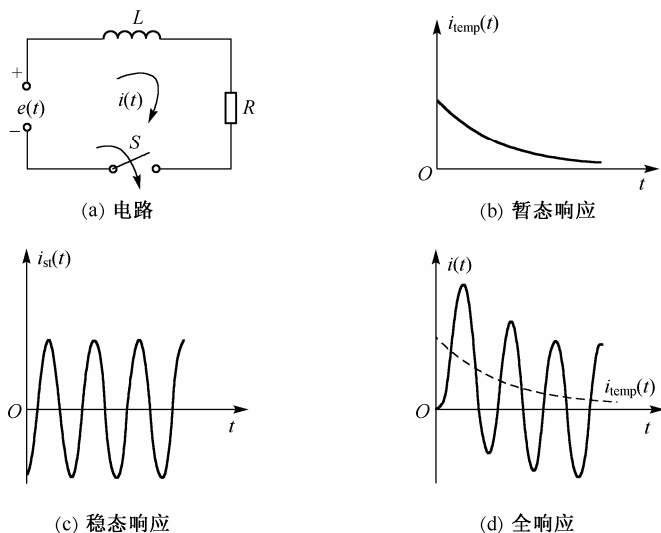


图 3.36 因果正弦激励 LR 串联电路的响应

### 3.5.4 用于计算卷积的傅里叶变换法

使用傅里叶变换可以方便地计算卷积, 这就是卷积计算的傅里叶变换法, 如图3.37所示。即首先计算两个被卷积信号的频谱, 然后相乘并取傅里叶逆变换, 就得到所需的结果。下面用几个例子来说明。

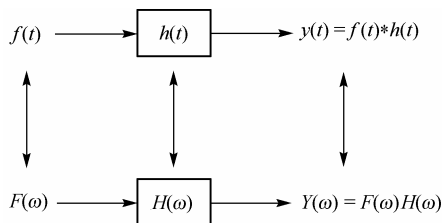


图 3.37 用傅里叶变换计算卷积

**例 3.34** 用傅里叶变换计算卷积  $u(t-3) * e^{-2t}u(t+1)$ 。

**解** 由于

$$u(t-3) \Leftrightarrow e^{-3j\omega} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-3j\omega}}{j\omega} \quad \text{和} \quad e^{-2t}u(t+1) \Leftrightarrow \frac{e^{2+j\omega}}{j\omega+2}$$

使得

$$u(t-3) * e^{-2t}u(t+1) \Leftrightarrow \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-3j\omega}}{j\omega} \right] \frac{e^{2+j\omega}}{j\omega+2} = \frac{e^2}{2} \left[ e^{-2j\omega} \left( \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) - \frac{e^{-2j\omega}}{j\omega+2} \right]$$

因此

$$u(t-3) * e^{-2t}u(t+1) = \frac{e^2}{2} [1 - e^{-2(t-2)}] u(t-2)$$

**例3.35** 计算图3.38(a)所示的矩形窗函数与图3.38(b)所示的奇对称矩形窗信号的卷积。

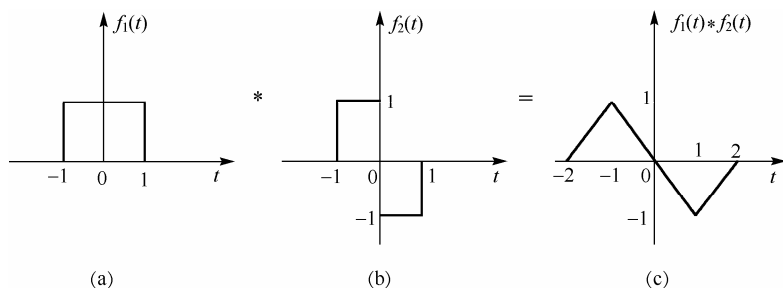


图 3.38 例 3.35 的图示

**解** 分别取  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  两信号的傅里叶变换, 有

$$F_1(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} \quad \text{和} \quad F_2(\omega) = \frac{e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}}{j\omega}$$

使得

$$\begin{aligned} F_1(\omega)F_2(\omega) &= \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} \cdot \frac{e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}}{j\omega} \\ &= \frac{e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} - 2(e^{j\omega} - e^{-j\omega})}{-\omega^2} \end{aligned}$$

由式(3.46)和  $f(\omega)\delta'(\omega) = f(0)\delta'(\omega) - f'(0)\delta(\omega)$  可知

$$f_1(t) * f_2(t) = r(t+2) - 2r(t+1) + 2r(t-1) - r(t-2)$$

其波形如图 3.38(c)所示, 其中  $r(t+1)$  为斜坡信号。

### 3.5.5 无失真传输和理想低通滤波器

#### 1. 无失真传输

所谓无失真传输, 是指任何信号  $f(t)$  通过传输系统后, 得到的输出  $y(t)$  只有幅度上的衰减和时间上的延迟, 即  $y(t) = Kf(t-\tau)$ , 其中增益  $K$  和延迟时间  $\tau$  为常数。这意味着无失真传输系统的冲激响应和频率响应为



$$h(t) = K\delta(t - \tau) \Leftrightarrow H(\omega) = Ke^{-j\omega\tau} \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\tau\omega \end{cases} \quad (3.93)$$

故无失真传输系统是冲激响应为强度等于  $K$  的延迟了  $\tau$  时刻的冲激函数的系统, 等价地说, 无失真传输系统是具有平坦幅频特性和斜率等于延迟时间之负的线性相频特性的系统, 如图 3.39 所示。

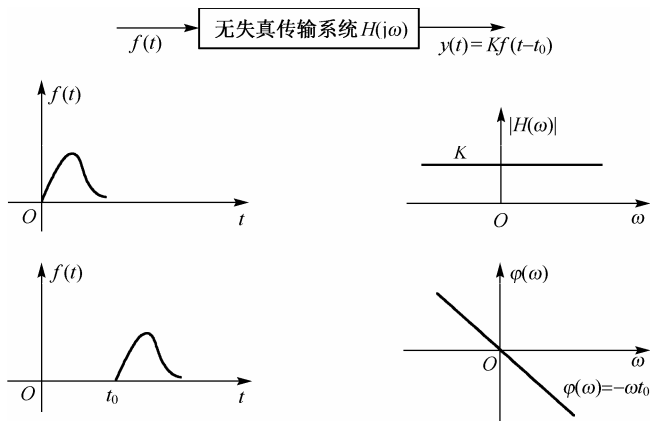


图 3.39 理想无失真传输系统

具有无限带宽的有平坦幅频特性的理想延迟器是物理上难以实现的, 实际上也不必如此苛刻要求。考虑到通过系统的物理信号总是带限于  $\omega_c$  的, 因此, 为便于实现, 可放松要求为

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega\tau} (u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)) \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = K \\ \varphi(\omega) = -\tau\omega \end{cases} \quad |\omega| \leq \omega_c \quad (3.94)$$

图 3.40(a) 和(b) 分别示出了其幅频特性和相频特性。它实际上就是截止频率为  $\omega_c$  的理想低通滤波器。

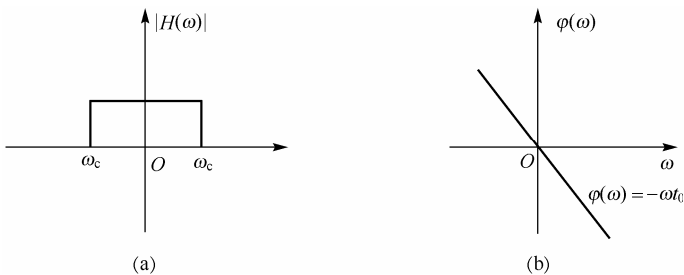


图 3.40 带限理想无失真传输系统

## 2. 理想低通滤波器

虽然理想低通滤波器的系统频率响应与式(3.94)相同, 但此时滤波器的带宽  $\omega_c$  小于输入信号的带宽  $\omega_m$ , 使得输出信号的带宽变窄了, 变成所要的信号带宽。对其传递函数进行傅里叶逆变换, 可知其冲激响应为

$$h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\text{Sa}(\omega_c(t-\tau)) \tag{3.95}$$

对其积分后，可得理想低滤波器的阶跃响应为

$$s(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\int_{-\infty}^t\frac{\sin[\omega_c(u-\tau)]}{\omega_c(u-\tau)}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_c(t-\tau)}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{Si}(\omega_c(t-\tau)) \tag{3.96}$$

其中，利用了事实： $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}$ ，并定义了正弦积分函数

$$\text{Si}(y)=\int_0^y\text{Sa}(x)dx \tag{3.97}$$

图3.41 示出了理想低滤波器的冲激响应和阶跃响应。从它明显可见跳变信号通过理想低通滤波器时产生的吉布斯 (Gibbs) 现象：幅度约为跳变幅度的 9%的上冲和平坦区的衰减振荡。

根据线性时不变性，矩形窗函数  $u(t)-u(t-t_0)$  通过延迟时间为  $\tau$  的理想低滤波器的输出为

$$s(t)-s(t-t_0)=\frac{1}{\pi}\left[\text{Si}(\omega_c(t-\tau))-\text{Si}(\omega_c(t-\tau-t_0))\right] \tag{3.98}$$

其输入、输出波形示于图3.42。可以观察到矩形脉冲通过理想低通滤波器后产生较严重的失真，也观察到前后沿的吉布斯现象。这是由于具有无限带宽的矩形脉冲在通过理想低通时，只有低频分量被保留了，而其丰富的高频分量被抑制了。数字通信中，传输系统的有限带宽造成了所传输的数字脉冲的失真，因此需在数字中继站对它进行整形和再生。

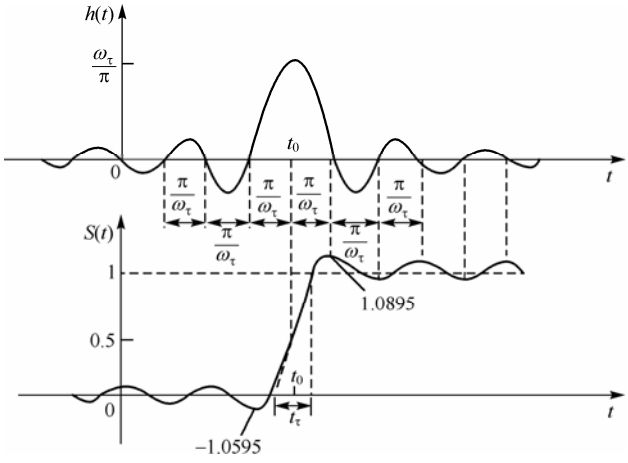


图 3.41 理想低滤波器的冲激响应和阶跃响应

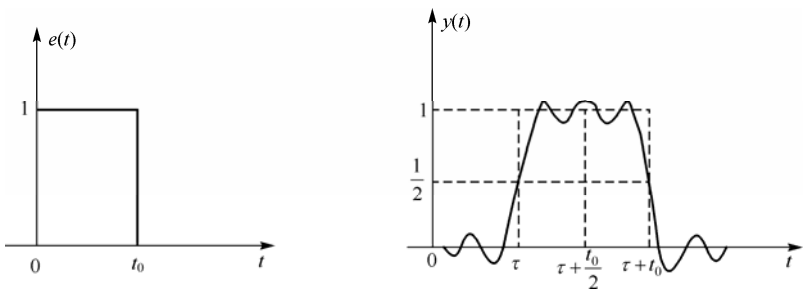


图 3.42 矩形脉冲通过理想低滤波器

低通滤波器在通信和电子系统中有着极其广泛的应用。例如,在用 A/D 变换器对模拟信号进行采样之前,使用具有低通特性的抗混叠滤波器,把输入模拟信号的带宽限制在采样频率的一半之内来完全避免信号频谱的混叠。又如根据采样定理,为从采样信号无失真地复原原始的模拟信号,必须使用带宽为原模拟信号的带宽的理想低通滤波器。下面,再以通信系统中的信号调制-解调原理为例说明之。

如图3.43(a)所示,调制的过程是用高频载波  $\cos(\omega_0 t)$  [其频谱如图3.43(c)所示]乘以频谱为如图3.43(b)所示的  $F(\omega)$  的低频信号  $f(t)$ ,使得发送的抑制载波 DSB 信号  $y(t) = f(t)\cos(\omega_0 t)$  的频谱为  $Y(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$ ,如图3.43(d)所示,它有以载频  $\omega_0$  为中心的窄带谱。

图3.44(a)示出了同步解调器。如图3.43(b)所示,同步解调的过程是用高频载波  $\cos(\omega_0 t)$  乘以接收信号  $y(t)$ ,使得解调器的输出信号  $x(t) = y(t)\cos(\omega_0 t)$  的频谱为  $X(\omega) = \frac{1}{2}[Y(\omega + \omega_0) + Y(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{4}[F(\omega + 2\omega_0) + F(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{2}F(\omega)$ ,它除了有原低频信号的频谱外,还有以两倍载频  $2\omega_0$  为中心的高频干扰谱。必须使用带宽不小于原低频信号带宽的低通滤波器,才能从解调信号滤出低频信号。

可见,低通滤波在调制-解调中有十分重要的作用。

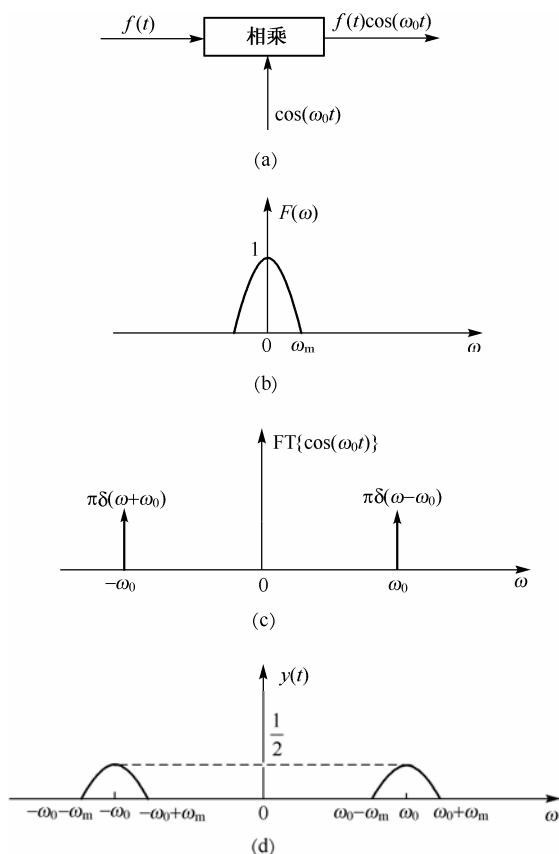


图 3.43 调制的过程

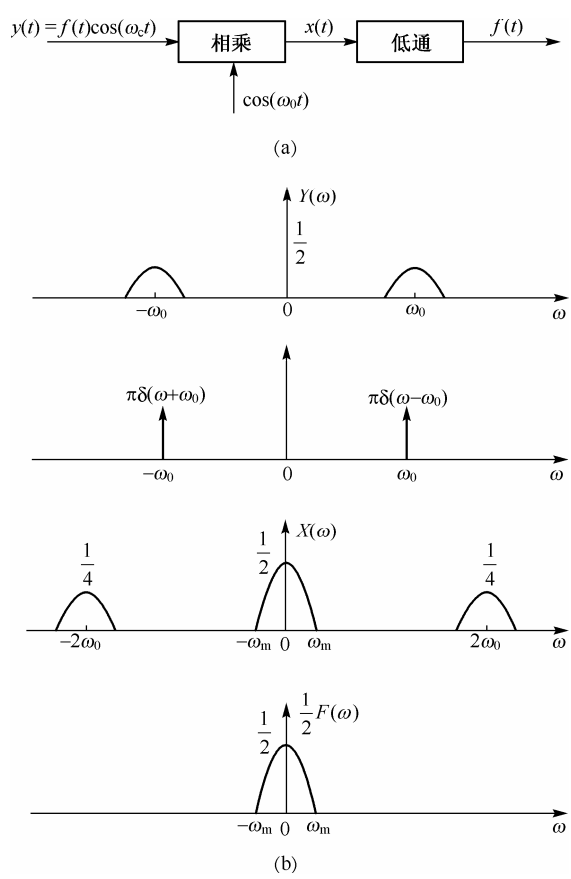


图 3.44 解调的过程

### 3.6 系统因果性与希尔伯特特性的对应关系

#### 3.6.1 系统因果性的必要条件——佩利-维纳准则

系统因果性指的是系统冲激响应为因果信号，因果性是系统物理可实现的充要条件。佩利 (Paley) 和维纳 (Wiener) 证明了系统物理可实现的必要条件。

对于平方可积的系统函数  $\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty$  而言，系统物理可实现的必要条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \tag{3.99}$$

式 (3.99) 称为佩利-维纳准则。如果系统幅度函数不满足此必要条件，则系统一定是物理不可实现的。显然，如果系统幅度函数在某个频带内恒为零，即  $|H(\omega)| = 0 \ (\omega_- < \omega < \omega_+)$ ，则由于  $\ln |H(\omega)| = \infty \ (\omega_- < \omega < \omega_+)$ ，使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega \geq \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega = \infty$$

违反了佩利-维纳准则, 这样系统一定是物理不可实现的。这表明所有理想低通、理想高通、理想带通和理想带阻等理想滤波器都是物理不可实现的。

作为一典型例, 我们研究高斯滤波器的非因果性。高斯滤波器的幅度函数为  $|H(\omega)| = e^{-\omega^2/\sigma_\omega^2}$ , 用佩利-维纳准则检验之, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|H(\omega)||}{1+\omega^2} d\omega &= \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{\left| \ln \exp\left(-\frac{\omega^2}{\sigma_\omega^2}\right) \right|}{1+\omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\sigma_\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{1+\omega^2} d\omega = \infty\end{aligned}$$

这证明了高斯滤波器一定是非因果的, 事实上其冲激响应也是一个高斯函数, 所以系统是非因果的。

众所周知, 有理函数仅有可数个孤立零点, 因此它一定满足佩利-维纳准则。由于满足佩利-维纳准则的幅度函数可对应于无限多个相位函数, 由此组成的系统函数不一定是因果的, 其中只有满足了 3.6.2 节所述的希尔伯特关系的系统函数才是因果的。这表明, 佩利-维纳准则是必要条件, 而不是充分条件。

### 3.6.2 时域因果性与频域希尔伯特特性的对应关系

因果系统的冲激响应满足  $h(t) = h(t)u(t)$ , 使得

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ [R(\omega) + jX(\omega)] * \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \right\}$$

从而有

$$\begin{cases} R(\omega) = \frac{1}{\pi} X(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ X(\omega) = -\frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \end{cases} \quad (3.100)$$

我们称因果系统的系统函数具有希尔伯特特性, 即它的实部和虚部构成一个希尔伯特变换对。

总之, 幅度函数满足佩利-维纳准则的系统, 当其实部和虚部构成一个希尔伯特变换对时, 系统是物理可实现的。

### 3.6.3 最小相位系统的希尔伯特关系\*

可逆的因果稳定系统称为相位系统。可以证明, 最小相位系统的对数幅度函数与相位函数构成一个希尔伯特变换对, 即

$$\begin{cases} \ln|H(\omega)| = \frac{1}{\pi} \varphi(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \\ \varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \ln|H(\omega)| * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|H(\lambda)|}{\omega - \lambda} d\lambda \end{cases} \quad (3.101)$$

这是因为最小相位系统的对数谱一定有因果的称之为复倒谱 (Complex Cepstrum)  $\hat{h}(t) = \text{IFT}\{\ln H(\omega)\}$  的时域特性, 即复倒谱是因果的连续时间信号 (反之亦然), 而对数谱的实部和虚部分别为对数幅度谱和相位谱, 因此根据时域因果性与频域希尔伯特特性的对应关系, 就有上述结论。

该结论的证明涉及第 4 章讨论的系统零极点的概念, 这里只给出启发式的理解: 由于  $H(\omega) \frac{d}{d\omega} \ln H(\omega) = \frac{d}{d\omega} H(\omega)$  使得  $h(t) * (\hat{t}h(t)) = th(t)$ , 这样  $\hat{h}(t)$  因果要求  $\hat{t}h(t)$  因果, 从而要求  $h(t)$  及  $th(t)$  因果。实际上,  $h(t)$  因果只是  $\hat{h}(t)$  因果的必要条件, 并非充分条件。因为因果信号可以是非最小相位的。只有稳定、可逆的因果信号才是最小相位信号。

根据本小节的理论, 从幅度传递函数求解对应的可逆因果稳定系统的步骤是: 首先计算对数幅度谱的傅里叶逆变换, 得到称之为倒谱的  $c(t) = \text{IFT}\{\ln |H(\omega)|\}$ ; 其次计算对应的复倒谱  $\hat{h}(t) = 2c(t)u(t)$ , 使它满足因果稳定系统的充要条件: 系统冲激响应的复倒谱是因果的; 再次对其进行傅里叶变换, 得到对应的因果稳定且可逆的系统的对数传递函数  $\ln H(\omega) = \text{FT}\{\hat{h}(t)\}$ ; 最后取指数变换, 就得到系统函数  $H(\omega)$ 。如果需要系统的冲激响应, 再取傅里叶逆变换即可。

3.6.4 解析信号的时域希尔伯特关系\*

具有单边谱的复信号称为解析信号, 它不可能是实函数。

根据傅里叶变换的对偶性, 由时域因果性和频域希尔伯特特性的对应关系易知, 单边谱信号 [即有因果频谱  $\tilde{F}(\omega) = F(\omega)u(\omega)$  的信号] 的实部和虚部构成一个希尔伯特变换对, 即

如果 
$$\tilde{f}(t) = f(t) + j\hat{f}(t) \Leftrightarrow \tilde{F}(\omega) = F(\omega)u(\omega) \tag{3.102}$$

则 
$$\begin{cases} f(t) = \hat{f}(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ \hat{f}(t) = -f(t) * \frac{1}{\pi t} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \end{cases} \tag{3.103}$$

复信号  $\tilde{f}(t)$  被称为与实信号  $f(t)$  对应的解析信号。从实信号  $f(t)$ , 用式 (3.103) 计算它所对应的  $\hat{f}(t)$ , 并用式 (3.102) 构成解析信号  $\tilde{f}(t)$ 。

3.6.5 希尔伯特滤波器\*

冲激响应  $h(t) = 1/\pi t$  的滤波器称为希尔伯特滤波器, 其系统传递函数为  $H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega)$ , 它是理想的  $90^\circ$  相移器, 使输入信号的所有频率分量都滞后  $90^\circ$ 。式 (3.103) 表明, 使用希尔伯特滤波器可以用来从一个具有双边谱的实信号得到其相应的具有单边谱的解析信号的虚部, 从而实现实信号到解析信号的转换。由于解析信号占有的频带仅为普通实信号占有的频带的一半, 因此在通信中得到了重要的应用: 单边带通信。例 3.26 给出了利用希尔伯特滤波器结合复正弦调制实现单边带调制的原理框图。

需要说明的是, 理想希尔伯特滤波器是无限带宽的, 实际上, 我们应当仅要求它在其输入信号的带宽内实现所需的  $90^\circ$  相位滞后即可。另外, 与理想低通滤波器相同, 理想希尔伯特滤波器也是物理不可实现的。在实践中, 我们只能使用滤波器最优逼近理论设计一个物理可实现滤波器, 去近似所需要的滤波器。

## 本章小结

1. 非周期信号的傅里叶变换是把信号分解为无穷多个复指数分量的连续和(积分),结果是连续谱。频谱是信号的频域描述,具有明确的物理意义。

2. 傅里叶变换具有许多性质,在计算傅里叶变换和傅里叶逆变换中有重要作用,必须熟练掌握。

3. 周期信号的频谱分析就是傅里叶级数分析,它把周期信号分解为无穷多个谐波分量之和,结果是离散谱。傅里叶系数与从周期信号单周期截取的非周期信号的傅里叶变换在各谐波频率上的采样值成正比。这是进行傅里叶级数分析的有效途径。

4. 频域分析不但可用来分析信号的频谱,而且可用来分析 LTI 系统的频域特性——频率响应、幅频特性和相频特性。它还可计算卷积和计算系统的冲激响应、阶跃响应、零输入响应、零状态响应和全响应等,也能进行系统的稳态分析和暂态分析。它要比时域分析技术简便有效得多。

5. 各元器件都有自己的频域表示模型,电路可在频域中直接进行分析。而且,频域求解电路要比时域分析技术简便有效得多。

6. 在频域中,通过分析信号通过各模块时频谱发送的变化,可有效地分析复杂系统的功能及其各模块的作用。

7. 采样定理是数字信号处理和数字通信的理论基础,它给出了从信号的离散样本值无失真复原信号的条件。

8. 平坦幅频特性和线性相位特性是无失真传输的条件,选频滤波器,尤其是低通滤波器在通信和电子系统中有十分重要的作用。跳变信号通过有锐截止特性的滤波器时,必然会产生吉布斯振荡。

9. 时(频)域因果性对应于频(时)域希尔伯特特性,它使得因果信号的频谱实部与虚部,因果稳定信号的对数幅度谱与相位谱,还有解析信号的实部与虚部都分别构成一个希尔伯特变换对。利用此原理可实现一个滤波器的因果化和稳定化,也可实现通信系统中的单边带调制。

## 习题

3.1 计算下列信号的傅里叶变换。

(a)  $f(t) = 2e^{-|t|}$

(b)  $f(t) = 2e^{-5t} \sin(4\pi t)$

(c)  $f(t) = 2e^{-5t} \sin(4\pi t)u(t)$

(d)  $f(t) = \operatorname{sgn}(t^2 - 9)$

(e)  $f(t) = e^{-jt} \delta(t-1)$

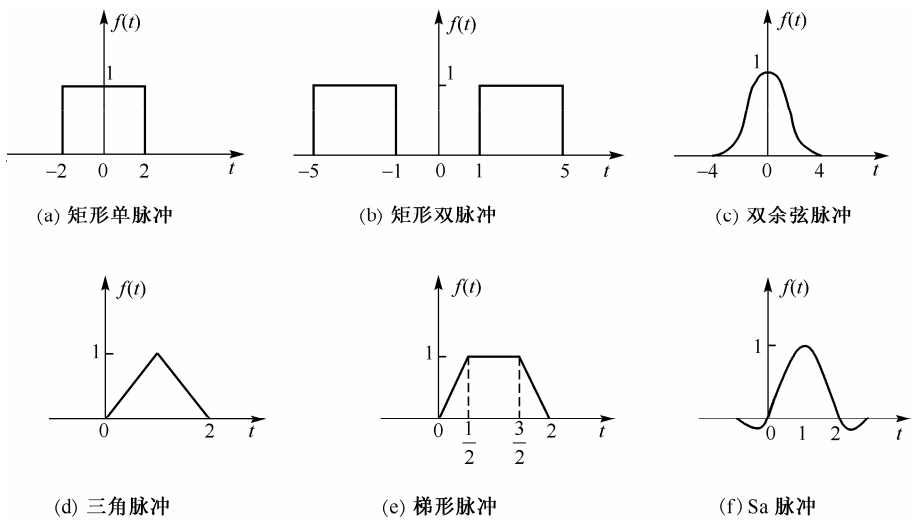
(f)  $f(t) = 1 + 2\cos(t) + 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$

(g)  $f(t) = e^{-2t}u(t+1)$

(h)  $f(t) = u\left(\frac{t}{2} - 1\right)$

(i)  $f(t) = (1-|t|)u(1-|t|)\cos(10\pi t)$

3.2 求题图 3.2 所示各信号的频谱。



题图 3.2

3.3 已知  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，利用傅里叶变换性质计算下列信号的傅里叶变换。

- (a)  $tf(2t)$

(c)  $(t-2)f(-2t)$

(e)  $f(1-t)$

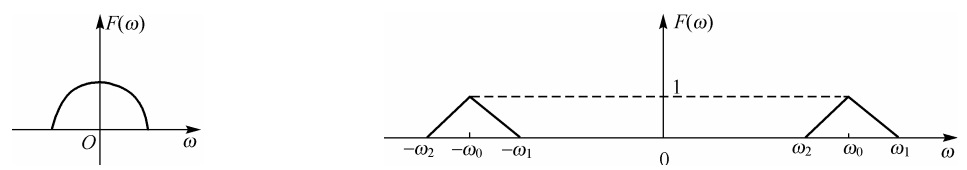
(g)  $f(2t-5)$
- (b)  $(t-2)f(t)$

(d)  $tf(t)$

(f)  $(1-t)f(1-t)$

3.4 已知低频调制信号  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$  [假设信号频谱  $F(\omega)$  如题图 3.4 所示] 用高频载波  $\cos(\omega_c t)$  进行调幅, 得到高频调幅信号  $x(t) = A[1 + mf(t)]\cos(\omega_c t)$ , 利用调制定理计算其频谱, 并画出其频谱。

3.5 已知  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , 假设信号频谱  $F(\omega)$  如题图 3.5 所示, 画出  $f(t)\cos(\omega_0 t)$ ,  $f(t)e^{j\omega_0 t}$  和  $f(t)\cos(\omega_1 t)$  的频谱(要注明频谱的边界频率)。



题图 3.4

题图 3.5

3.6 计算下列频谱的傅里叶逆变换。

- (a)  $F(\omega) = u(\omega_0 - |\omega|)$

(c)  $F(\omega) = 2\cos(3\omega)$

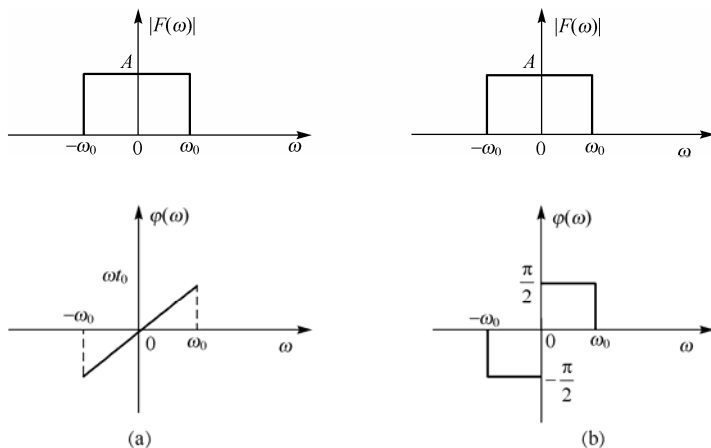
(e)  $F(\omega) = \sum_{n=0}^2 \frac{2\sin \omega}{\omega} e^{-j(2n+1)\omega}$
- (b)  $F(\omega) = \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)$

(d)  $F(\omega) = [u(\omega) - u(\omega - 2)]e^{-j\omega}$

(f)  $F(\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$

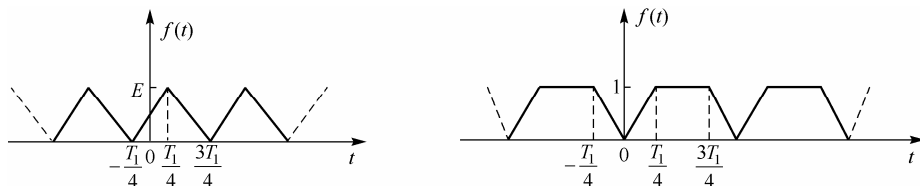
3.7 求题图 3.7 所示各频谱函数的傅里叶逆变换。





题图 3.7

3.8 求题图 3.8 所示各周期信号的傅里叶级数。



题图 3.8

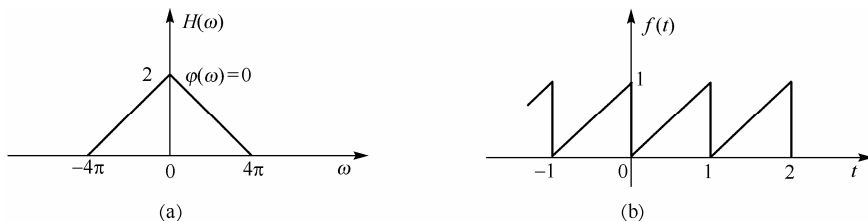
3.9 当平方器的输入  $f(t)$  为下列信号时, 求输出  $y(t) = f^2(t)$  的频谱函数。

(a)  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ , (b)  $f(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos(2t)$

3.10 当滤波器的频率响应如题图 3.10(a) 所示时, 它具有零相频特性, 求

(a) 输入信号为  $f(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$  时的输出信号;

(b) 输入信号为题图 3.10(b) 所示的周期锯齿波时的输出信号。



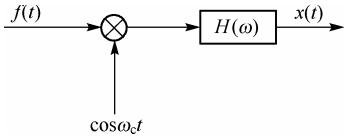
题图 3.10

3.11 已知并联谐振电路的频率响应为

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j100\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

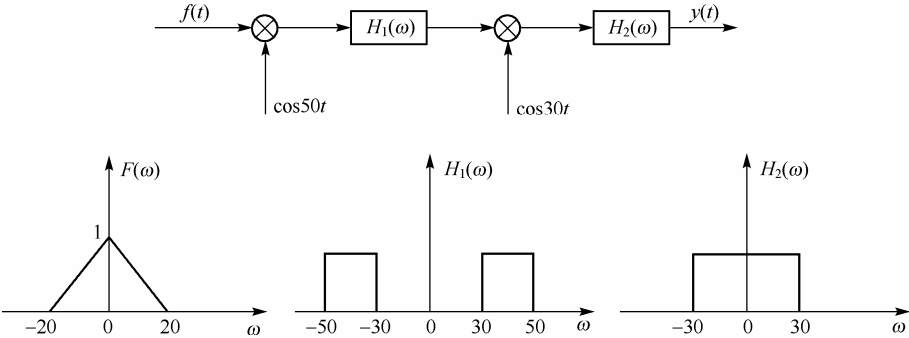
求电路输入为  $f(t) = 10 + 12\cos(\omega_0 t) + 5\cos(3\omega_0 t)$  时的输出信号。

- 3.12 求输入信号  $f(t) = \cos(2t)$  通过滤波器  $H(\omega) = \frac{2 - j\omega}{2 + j\omega}$  时的输出信号。
- 3.13 求输入信号  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3e^{-jn\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}$  通过滤波器  $H(\omega) = r\left(1 - \frac{|\omega|}{3}\right)$  时的输出信号，其中  $r(\cdot)$  为斜坡函数。
- 3.14 在题图 3.14 所示的系统中，已知输入信号  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3e^{-jnt}$ ，调制信号  $s(t) = \cos t$ ，低通滤波器频率响应为  $H(\omega) = e^{-j\pi\omega/3}u(1.5 - |\omega|)$ ，求系统的输出信号。



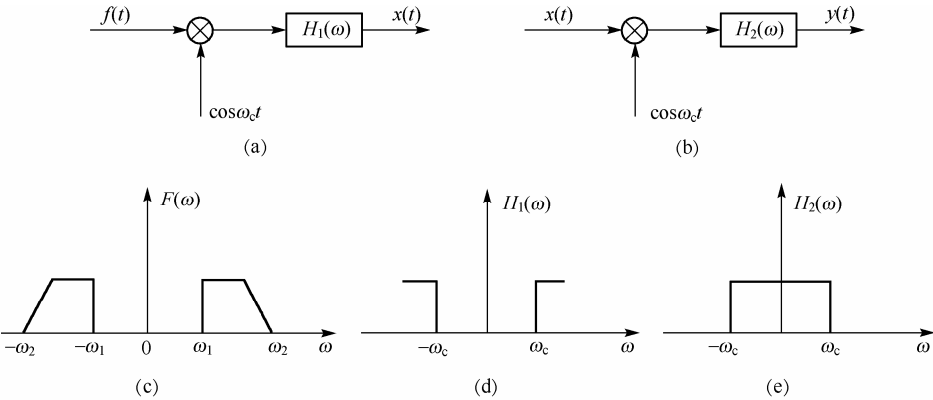
题图 3.14

- 3.15 已知系统如题图 3.15 所示，其中两滤波器的频率响应分别为  $H_1(\omega)$  和  $H_2(\omega)$ ，求输入频谱  $F(\omega)$  如题图 3.15 所示时的输出频谱。



题图 3.15

- 3.16 已知系统如题图 3.16 所示，其中两滤波器的频率响应分别为  $H_1(\omega)$  和  $H_2(\omega)$ ，求输入频谱  $F(\omega)$  如图所示时的  $x(t)$  和  $y(t)$  的频谱。



题图 3.16

3.17 如题图 2.5 所示电路,  $t < 0$  时, 开关置于位置“1”, 电路已进入稳态;  $t = 0$  时, 开关位置切换导“2”; 已知  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ F}$ 。用频域分析技术求

(1) 以  $i(t)$  为响应的系统频率响应和系统微分方程;

(2) 系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

3.18 如题图 2.6 所示电路,  $t < 0$  时, 开关置于位置“1”, 电路已进入稳态;  $t = 0$  时, 开关位置切换导“2”。用频域分析技术求

(1) 以  $i(t)$  为响应的系统频率响应和系统微分方程;

(2) 系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

3.19 已知系统  $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f'(t)$  的初始条件为  $y(0_+) = 0$  和  $y'(0_+) = 1$ , 激励  $f(t) = u(t)$ , 用频域分析技术求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

3.20 用频域分析技术计算下列卷积:

(1)  $e^{-3t}u(t) * e^{-5t}u(t)$

(2)  $t^2e^{-t}u(t) * \delta'(t)$

3.21 各信号如题图 2.19 所示, 用频域分析技术求下列卷积。

(1)  $f_1(t) * f_2(t)$

(2)  $f_1(t) * f_3(t)$

(3)  $f_1(t) * f_4(t)$

(4)  $f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$

(5)  $f_1(t) * [2f_4(t) - f_3(t - 3)]$

3.22 确定下列信号的最低采样频率和采样间隔

(1)  $\text{Sa}(100t)$

(2)  $\text{Sa}^2(100t)$

(3)  $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}(50t)$

(4)  $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$

3.23 如果电视信号占有频带  $0 \sim 6 \text{ MHz}$ , 电视台每秒发送 25 幅图像, 每幅图像有 625 条水平扫描线, 问每条水平扫描线至少要有多少个采样点?

3.24 用冲激函数序列  $\delta_{T_s}(t)$  (采样间隔  $T_s = 1/f_s$ ,  $f_s = 800 \text{ Hz}$  为采样频率) 对带限信号  $f(t) = 5 + 2\cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t)$  进行采样。

(1) 画出  $f(t)$  及其采样信号  $f_s(t)$  在频率区间  $(-2 \text{ kHz}, 2 \text{ kHz})$  的频谱图;

(2) 若把采样信号  $f_s(t)$  输入到理想低通滤波器  $H(\omega) = T_s u(1000\pi - |\omega|)$ , 画出滤波器输出频谱, 并求输出信号  $y(t)$ 。

## 第4章 连续时间信号与系统的s域分析

### 学习要点

本章讨论连续信号与系统的  $s$  域分析。要求读者：

1. 掌握拉普拉斯变换分析技术的基本概念和计算，尤其要注意应用性质来计算一些常用信号的拉普拉斯变换；
2. 掌握部分分式分解定理在拉普拉斯逆变换中的应用；
3. 掌握基本元件和电路定律的  $s$  域模型；
4. 掌握线性电路和用微分方程描述的线性系统的  $s$  域分析方法；
5. 理解系统函数的意义和性质，并掌握零、极点的概念及其分布对系统特性，尤其是对稳定性的影响。

### 4.1 拉普拉斯变换概述

#### 4.1.1 拉普拉斯变换的定义

尽管奇异函数的使用扩大了傅里叶变换的应用范围，但是仍有不少常见信号如指数增长因果信号，不存在傅里叶变换。为了进一步扩大傅里叶变换的应用范围，先把信号进行恰当的指数衰减，然后对它进行傅里叶变换，这就产生了如下定义的拉普拉斯变换 (Laplace Transformation)，简称拉氏变换。

因果信号  $f(t)$  ( $0 \leq t < +\infty$ ) 的拉普拉斯变换  $F(s)$  定义为

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.1)$$

式中， $s = \sigma + j\omega$  称为复频率。 $F(s)$  是因果信号  $f(t)$  的复频域描述。

$F(s)$  实际上就是指数加权后的因果信号  $e^{-\sigma t} f(t)$  ( $0 \leq t < +\infty$ ) 的傅里叶变换。因此，求  $F(s)$  的傅里叶逆变换，可以得到  $e^{-\sigma t} f(t)$ ，并进而得到因果信号  $f(t)$ ，即

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (4.2)$$

式(4.1)称为拉普拉斯正变换，式(4.2)称为拉普拉斯逆变换(简称拉氏逆变换)。 $f(t)$  和  $F(s)$  称为拉普拉斯变换对，记做  $f(t) \Leftrightarrow F(s)$ 。

通常，式(4.1)的积分下限 0 指的是  $0_-$ ，有时也可以根据需要改为  $0_+$ 。

从式(4.2)可见，拉氏变换是把因果连续信号表示为无限多个幅度无穷小、频率连续变化的指数衰减的复正弦信号的叠加(积分)。

本书介绍的拉氏变换仅对因果信号有定义，非因果信号应使用双边拉氏变换。双边拉氏

变换在本书仅做简单介绍。由于物理信号都是自接入时刻后才对系统起作用的，而物理可实现系统又必须是因果系统，所以不应视因果性为一限制。

由拉氏变换的定义式(4.1)易知，其存在的充分条件是 $e^{-\sigma t} f(t)$ 为绝对可积函数，即

$$\int_0^{+\infty} |e^{-\sigma t} f(t)| dt < +\infty$$

这使得增长速度不快于指数增长函数的信号都存在拉氏变换。使拉氏变换收敛的 $s$ 取值范围称为拉氏变换的收敛域。

拉普拉斯变换的缺点是：不像傅里叶变换有明确的物理意义，它没有明确的物理意义。复频率更多的是数学意义。

4.1.2 典型信号的拉普拉斯变换

1. 单位冲激信号

把 $f(t) = \delta(t)$ 代入式(4.1)，利用冲激的抽样性质，易知冲激信号的拉氏变换为与复频率 $s$ 无关的常数1，即

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad \text{对于任何 } s \tag{4.3}$$

2. 阶跃信号

同样地，把 $f(t) = u(t)$ 代入式(4.1)并进行积分，易知

$$u(t) \Leftrightarrow 1/s \quad \sigma > 0 \tag{4.4}$$

3. 因果指数信号

把因果指数信号 $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ 代入式(4.1)，有

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{1}{s+\alpha} \quad \sigma > -\alpha \tag{4.5}$$

因果指数增长信号 $e^{\alpha t} u(t)$ 及其拉氏变换的收敛域如图 4.1 的上半部分所示，其收敛域为在右半 $s$ 平面的垂直线 $s - \alpha = 0$ 的右侧。因果指数衰减信号 $e^{-\alpha t} u(t)$ 及其拉氏变换的收敛域如图 4.1 的下半部分所示，其收敛域为左半 $s$ 平面的垂直线 $s + \alpha = 0$ 的右侧。

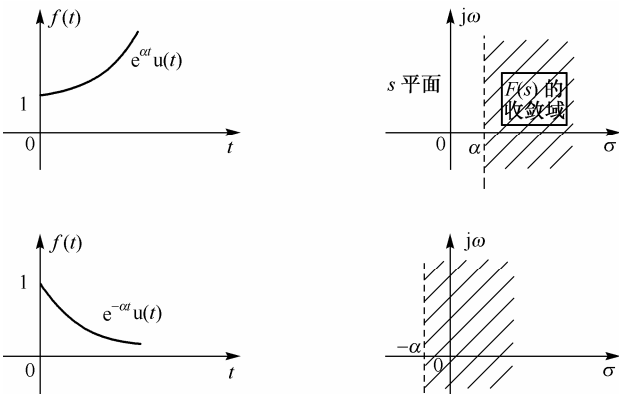


图 4.1 因果指数信号及其拉氏变换的收敛域

#### 4. 因果矩形窗信号(矩形脉冲信号)

把脉宽  $\tau$  的因果矩形窗信号  $G_{0,\tau}(t) = u(t) - u(t - \tau) = G\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$  代入式(4.1), 有

$$F(s) = \int_0^{\tau} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

$$\text{即} \quad G_{0,\tau}(t) \Leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad \sigma > 0 \quad (4.6)$$

由于单边拉氏变换的收敛范围总是  $\sigma > \sigma_0$  (虽然  $\sigma_0$  各不相同), 因此以后不再一一标明。

### 4.2 拉普拉斯变换的性质

#### 4.2.1 线性

拉氏变换是一个线性运算, 它满足叠加原理。即若  $f_i(t) \Leftrightarrow F_i(s)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i F_i(s) \quad (4.7)$$

从拉氏变换的定义可以直接证明拉氏变换的线性性质成立。这表明拉氏变换也是一个线性变换。需要注意的是, 收敛域一般为原收敛域的交集, 即收敛域要缩小; 但当叠加引起后面要讨论到的零点和极点之间的对消时, 收敛域有可能反而扩大。

#### 4.2.2 时延定理

时域延迟  $t_0$  对应于  $s$  域指数加权  $e^{-st_0}$ , 即

$$f(t - t_0)u(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad t_0 > 0 \quad (4.8)$$

**证明:** 由拉氏变换的定义, 有

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0} \int_{t_0}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-s(t-t_0)} dt = e^{-st_0} F(s) \quad t_0 > 0$$

从证明过程可见, 条件  $t_0 > 0$  是必须要满足的。

在使用时延定理时要注意, 延迟是对信号因果分量  $f_+(t) = f(t)u(t)$  的右移。

**例 4.1** 求时域延迟冲激函数的拉氏变换。

**解** 利用时延定理和式(4.3), 有

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0} \quad (4.9)$$

#### 4.2.3 复频移定理

复频率搬移  $s_0$  对应于时域用  $e^{s_0 t}$  加权, 即

$$e^{s_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(s - s_0) \quad (4.10)$$

显然, 拉氏变换的复频移定理是傅里叶变换的复调制定理的推广。

**证明：**由拉氏变换的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s_0 t} f(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(s-s_0)t} dt = F(s-s_0)$$

**例 4.2** 求因果正弦信号的拉氏变换。

**解** 利用复频移定理和式(4.4)，并使用  $\alpha$  为复数时的式(4.5)，有

$$\cos(\omega_0 t) u(t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4.11)$$

和

$$\sin(\omega_0 t) u(t) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4.12)$$

**例 4.3** 求因果指数加权正弦信号的拉氏变换。

**解** 利用复频移定理和式(4.11)与式(4.12)，有

$$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad (4.13)$$

和

$$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad (4.14)$$

## 4.2.4 尺度(Scaling)定理

时域压/扩  $a(a>0)$  倍相应于复频域扩/压  $a$  倍，即

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.15)$$

**证明：**由拉氏变换的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{s}{a}x} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$$

**例 4.4** 已知  $f(s) \Leftrightarrow F(s)$ ，求  $f(at - t_0) u\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$  ( $a > 0$ ) 的拉氏变换。

**解** 根据时延定理，有

$$g\left(t - \frac{t_0}{a}\right) u\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \Leftrightarrow G(s) e^{-\frac{st_0}{a}}$$

其中， $g(t) = f(at)$ ，并且由尺度定理，有

$$G(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

则

$$f(at - t_0) u\left(t - \frac{t_0}{a}\right) = g\left(t - \frac{t_0}{a}\right) u\left(t - \frac{t_0}{a}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{st_0}{a}} \quad (4.16)$$

实际上，时延定理和尺度定理是这里的更一般情况的两个特例。

### 4.2.5 时域微分性质

时域微分相应于复频域乘以  $s$  减去初值, 即

$$f'(t)u(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \quad (4.17)$$

证明: 由拉氏变换的定义, 有

$$\int_{0_-}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_{0_-}^{+\infty} + s \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0_-)$$

$$\text{推论: } f^{(n)}(t)u(t) \Leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}f'(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-) \quad (4.18)$$

在零初始条件下, 时域微分定理表明

$$f^{(n)}(t)u(t) \Leftrightarrow s^n F(s) \quad (4.19)$$

讨论: 因果信号  $f(t)u(t)$  在  $0_-$  时刻的零初始条件导致  $[f(t)u(t)]^{(n)} \Leftrightarrow s^n F(s)$ 。这样, 对因果微分定理的时域表示式 (2.45) 和式 (2.47) 进行拉普拉斯变换后, 就得到式 (4.17) 和式 (4.18)。这表明, 拉氏变换的时域微分性质是因果微分定理的  $s$  域表示式。

例 4.5 求  $\delta^{(n)}(t)$  的拉氏变换。

解 由式 (4.3) 和式 (4.19), 有

$$\delta^{(n)}(t) \Leftrightarrow s^n \quad (4.20)$$

### 4.2.6 时域积分性质

时域积分相应于在复频域加上初始积分值后除以  $s$ , 即

$$f^{(-1)}(t)u(t) \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} \quad (4.21)$$

证明: 令  $f^{(-1)}(t) = g(t) \Rightarrow f(t) = g'(t)$ , 由式 (4.17) 有

$$F(s) \Leftrightarrow f(t)u(t) = g'(t)u(t) \Leftrightarrow sG(s) - g(0_-) = sG(s) - f^{(-1)}(0_-)$$

则

$$f^{(-1)}(t)u(t) = g(t)u(t) \Leftrightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

即式 (4.21) 成立。当  $f^{(-1)}(0_-) = 0$  时 [即  $f^{(-1)}(t)$  处于零初始条件时], 式 (4.21) 简化为

$$f^{(-1)}(t)u(t) \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

推论: 在零初始条件下, 有

$$f^{(-n)}(t)u(t) \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s^n} \quad (4.22)$$



**例 4.6** 求信号  $t^n u(t)$  的拉氏变换。

**解** 由式(4.22)和式(4.4), 有

$$t^n u(t) = n! u^{(-n)}(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (4.23)$$

特殊地, 
$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \text{和} \quad t^2 u(t) \Leftrightarrow \frac{2}{s^3} \quad (4.24)$$

## 4.2.7 卷积定理

因果信号的时域卷积相应于复频域相乘, 即

$$[f_1(t)u(t)] * [f_2(t)u(t)] \Leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \quad (4.25)$$

**证明:** 用式(4.1)计算  $f_1(t) * f_2(t)$  的拉氏变换, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f_1(t-\tau)u(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f_2(\tau)e^{-s\tau}d\tau \right] f_1(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}d(t-\tau) \\ &= F_1(s)F_2(s) \end{aligned}$$

**推论:** 对于有冲激响应  $h(t)$  的因果 LTI 系统而言, 因果激励  $f(t)$  产生的零状态响应为

$$y(t) = h(t) * f(t)$$

在  $s$  域中有

$$Y(s) = H(s)F(s) \quad (4.26)$$

其中, 系统函数  $H(s)$  是系统冲激响应  $h(t)$  的拉氏变换。

该推论是系统  $s$  域分析的基础。

**例4.7** 求因果周期信号  $f(t) = f_1(t) * \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT)$  的拉氏变换, 其中, 从它截取的第一个周期的非周期因果信号是有限时宽信号  $f_1(t) = f(t)G_{0,T}(t) \Leftrightarrow F_1(s)$ 。

**解** 由于 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

所以由卷积定理, 有

$$f(t) \Leftrightarrow F(s) = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} \quad (4.27)$$

**例4.8** 求脉宽为  $\tau$  的因果周期矩形波信号的拉氏变换。

**解** 由式(4.6)和式(4.27)可知, 脉宽为  $\tau$  的因果周期矩形波信号的拉氏变换是  $\frac{1-e^{-s\tau}}{s(1-e^{-sT})}$ 。

**例4.9** 求因果周期半波正弦脉冲信号和因果周期半波余弦脉冲信号的拉氏变换。

解  $\omega_0 T = 2\pi$  使得对因果周期半波正弦脉冲信号  $f_s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{s1}(t)(t-nT)$ , 有

$$\begin{aligned} f_{s1}(t) &= \sin(\omega_0 t) G_{0, \frac{T}{2}}(t) \\ &= \sin(\omega_0 t) u(t) + \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) u\left(t - \frac{T}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \left(1 + e^{-\frac{sT}{2}}\right) \end{aligned}$$

因此, 因果周期半波正弦脉冲波的拉氏变换为

$$\frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2) \left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)}$$

另外, 易知因果周期半波余弦脉冲信号  $f_c(t) = \cos(\omega_0 t) u(t) + f_s\left(t - \frac{T}{4}\right)$ , 其拉氏变换为

$$\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)} + \frac{\omega_0 e^{-\frac{sT}{4}}}{(s^2 + \omega_0^2) \left(1 - e^{-\frac{sT}{2}}\right)}$$

## 4.2.8 复频域微分性质

$s$  域微分相应于时域乘以  $-t$ , 即

$$-tf(t) \Leftrightarrow F'(s), \quad tf(t) \Leftrightarrow -F'(s) \quad (4.28)$$

证明: 把式(4.1)的两边对  $s$  求导后, 有

$$F'(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-tf(t)) e^{-st} dt \Leftrightarrow -tf(t)$$

$$\text{推论:} \quad t^n f(t) \Leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s) \quad (4.29)$$

例 4.10 求因果幂加权的指数衰减信号  $t^n e^{-\alpha t} u(t)$  的拉氏变换。

解 由式(4.29)和式(4.5), 或由式(4.23)和式(4.10), 有

$$t^n e^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}, \quad \text{即} \quad \frac{1}{n!} t^n e^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}} \quad (4.30)$$

$$\text{特殊地,} \quad te^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \quad t^2 e^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{2}{(s + \alpha)^3} \quad (4.31)$$

它们可用于计算拉氏变换中有重极点的部分分式的拉氏逆变换。

例 4.11 求因果指数加权正弦信号  $t^n e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t)$  和  $t^n e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t)$  的拉氏变换。

解 由欧拉公式和式(4.30), 有

$$t^n e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{2} \left[ \frac{1}{(s + \alpha - j\omega_0)^{n+1}} + \frac{1}{(s + \alpha + j\omega_0)^{n+1}} \right] \quad (4.32)$$

$$\text{和} \quad t^n e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{2j} \left[ \frac{1}{(s + \alpha - j\omega_0)^{n+1}} - \frac{1}{(s + \alpha + j\omega_0)^{n+1}} \right] \quad (4.33)$$

$$\text{特殊地,} \quad te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{(s + \alpha)^2 - \omega_0^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2} \quad (4.34)$$

$$\text{和} \quad te^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{2\omega_0(s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2} \quad (4.35)$$

## 4.2.9 复频域卷积定理

复频域卷积相应于时域相乘, 即

$$f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) \quad (4.36)$$

**证明:** 类似于卷积定理的证明, 用式 (4.2) 计算  $\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$  的拉氏逆变换即可。

## 4.2.10 初值定理

因果信号的初值可用下式通过它的拉氏变换函数计算:

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (4.37)$$

**证明:** 从时域微分定理可知,  $sF(s) - f(0_+) = \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt$ 。对它取  $s \rightarrow +\infty$  的极限, 注意到  $\lim_{s \rightarrow +\infty} (e^{-st}) = 0$  使得  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt \right] = 0$ , 就得到拉普拉斯变换的初值定理。

## 4.2.11 终值定理

因果信号的终值可用下式通过它的拉氏变换函数计算:

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.38)$$

**证明:** 令  $f_+(t) = f(t)u(t)$ , 从时域微分定理可知,  $sF(s) = \int_{0_-}^{+\infty} [f_+(t)]' e^{-st} dt$ , 使得  $[sF(s)]|_{s=0} = \int_{0_-}^{+\infty} [f_+(t)]' dt = \int_{0_-}^{+\infty} df_+(t) = f_+(+\infty) - f_+(0_-) = f_+(+\infty) = f(+\infty)$ , 这就是拉普拉斯变换的终值定理。

**例 4.12** 已知一个信号的拉氏变换为  $\frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$ , 求该信号的初值和终值。

**解** 由初值定理和终值定理易知, 该信号的初值为 1, 终值为 0。

表 4.1 列出了常见函数的拉普拉斯变换, 表 4.2 列出了拉普拉斯变换的主要性质。

表 4.1 常见函数的拉普拉斯变换

$f(t) \ (t > 0)$	$F(s)$
------------------	--------

冲激 $\delta(t)$	1
阶跃 $u(t)$	$s^{-1}$
$e^{-\sigma t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$

(续表)

$f(t) \ (t > 0)$	$F(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
$te^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0(s + \alpha)}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2}$
$te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{(s + \alpha)^2 - \omega_0^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2}$

表 4.2 拉普拉斯变换的主要性质

名 称	表 示 式
线性	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i F_i(s)$
延时(时域平移)	$f(t - t_0)u(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0}F(s)$
$s$ 域平移	$e^{s_0 t} f(t) \Leftrightarrow F(s - s_0)$
尺度变换	$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
时域微分	$f'(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$ $f^{(n)}(t)u(t) \Leftrightarrow s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0_-)$
时域积分	$f^{(-1)}(t) \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$
初值定理	$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$
终值定理	$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
卷积	$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

相乘( $s$ 域卷积)	$f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$
$s$ 域微分	$-tf(t) \Leftrightarrow F'(s)$

4.3 拉普拉斯逆变换

在进行信号和系统的  $s$  域分析时，需计算拉普拉斯逆变换。  
通常， $F(s)$  可表示为两个关于  $s$  的实系数多项式之比，即

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{c \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

(4.39)

式中， $c$  为常数。当  $m > n - 1$  时， $F(s)$  可分解为一个多项式与一个真分式之和，其中多项式的拉氏逆变换很容易计算，而真分式的拉氏逆变换计算属于这里讨论的对象。所以，可不失一般性地规定  $m \leq n - 1$ 。 $p_i$  为  $F(s)$  的第  $i$  个极点，因为  $F(p_i) = \infty$ ，而  $z_i$  为  $F(s)$  的第  $i$  个零点，因为  $F(z_i) = 0$ 。

计算  $F(s)$  的拉氏逆变换的步骤是：首先把它展开为部分分式之和，然后逐项计算逆变换，这些项的逆变换之和就是  $F(s)$  的逆变换。按分母的根(极点)，分为单极点(即  $p_i$  两两不相同)情况和重极点(即有  $k$  个极点都等于同一  $p_i$ )情况。

4.3.1 单极点情况

此时利用代数学知识，有部分分式的展开式：

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t)$$

(4.40)

因为  $p_k \neq p_i, k \neq i$  和

$$(s - p_i)F(s) = K_i + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{K_k (s - p_i)}{s - p_k}$$

所以部分分式展开系数为

$$K_i = \left[ (s - p_i)F(s) \right] \Big|_{s=p_i}$$

(4.41)

当存在共轭极点，即  $p_{i+1} = p_i^*$  时， $F(s)$  的实系数性质要求约束  $K_{i+1} = K_i^*$  必须成立，使得

$$\frac{K_i}{s - p_i} + \frac{K_i^*}{s - p_i^*} = \frac{2 \left[ R_{K_i} (s - \alpha_{p_i}) - I_{K_i} \omega_{p_i} \right]}{(s - \alpha_{p_i})^2 + \omega_{p_i}^2} \Leftrightarrow 2 |K_i| e^{\alpha_{p_i} t} \cos(\omega_{p_i} t + \varphi_{K_i}) u(t)$$

(4.42)

式中， $p_i = \alpha_{p_i} + j\omega_{p_i}$ ； $K_i = R_{K_i} + jI_{K_i} = |K_i| e^{j\varphi_{K_i}}$ 。

例 4.13 已知  $F(s) = \frac{s + 5}{s(s + 1)(s + 3)}$ ，求  $f(t)$ 。

解 由式(4.41)可知

$$K_1 = [sF(s)]|_{s=0} = \frac{0+5}{(0+1)(0+3)} = \frac{5}{3}$$

$$K_2 = [(s+1)F(s)]|_{s=-1} = \frac{-1+5}{(-1)(-1+3)} = -2$$

$$K_3 = [(s+3)F(s)]|_{s=-3} = \frac{-3+5}{(-3)(-3+1)} = \frac{1}{3}$$

于是, 由式(4.40)可知

$$f(t) = \left[ \frac{5}{3} - 2e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right] u(t)$$

例 4.14 已知  $F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{s+2}{(s+1+j)(s+1-j)}$ , 求  $f(t)$ 。

解 由式(4.41)可知

$$K_1 = [(s+1+j)F(s)]|_{s=-1-j} = \frac{-1-j+2}{-1-j+1-j} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$K_2 = K_1^*$$

于是, 由式(4.42)可知

$$f(t) = 2e^{-t} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(-t + \frac{\pi}{4}\right) u(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) u(t)$$

更简单地,

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1}$$

由式(4.13)和式(4.14)可得同一结果

$$f(t) = e^{-t} (\cos(t) + \sin(t)) u(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) u(t)$$

### 4.3.2 重极点情况

当有  $k$  个极点都等于同一  $p_i$ , 即当  $p_i = p_{i+1} = \cdots = p_{i+k-1}$  ( $k \geq 2$ ) 时, 由代数学知识可知, 部分分式展开式中与此有关的项为

$$F_i(s) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{K_{im}}{(s-p_i)^{k-m}} \Leftrightarrow f_i(t) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{K_{im} t^{k-m-1}}{(k-m-1)!} e^{p_i t} u(t) \quad (4.43)$$

因为

$$(s-p_i)^k F(s) = (s-p_i)^k F_i(s) + R_i(s) = \sum_{m=0}^{k-1} K_{im} (s-p_i)^m + R_i(s)$$

其中,

$$R_i(s) = (s - p_i)^k \sum_{q=1, p_q \neq p_i}^n \frac{K_q}{s - p_q}$$

使得

$$\left[ (s - p_i)^k F(s) \right]^{(m)} = \sum_{l=m}^{k-1} l(l-1) \cdots (l-m+1) K_{il} (s - p_i)^{l-m} + [R_i(s)]^{(m)} \quad m = 0, 1, \dots, k-1$$

所以 
$$K_{im} = \frac{1}{m!} \left[ (s - p_i)^k F(s) \right]^{(m)} \Big|_{s=p_i} \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (4.44)$$

**例 4.15** 已知  $F(s) = \frac{s-2}{s(s+2)^3}$ , 求  $f(t)$ 。

**解** 部分分式分解  $F(s)$  后, 有

$$F(s) = \frac{K_{10}}{(s+2)^3} + \frac{K_{11}}{(s+2)^2} + \frac{K_{12}}{s+2} + \frac{K_2}{s}$$

故 
$$F_1(s) = (s+2)^3 F(s) = K_{10} + K_{11}(s+2) + K_{12}(s+2)^2 + \frac{K_2(s+2)^3}{s} = 1 - \frac{2}{s}$$

于是 
$$K_{10} = [F_1(s)] \Big|_{s=-2} = 1 - \frac{2}{-2} = 2, \quad K_{11} = [F_1'(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{2}{(-2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} [F_1''(s)] \Big|_{s=-2} = -\frac{2}{(-2)^3} = \frac{1}{4}, \quad K_2 = [sF(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{0-2}{(0+2)^3} = -\frac{1}{4}$$

则 
$$f(t) = \left[ -\frac{1}{4} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + t^2 \right) e^{-2t} \right] u(t)$$

### 4.3.3 分母有负指数项情况

此时

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - ae^{-sT}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-snT} F_1(s) \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n f_1(t - nT) \quad (4.45)$$

当  $f_1(t)$  的时宽大于  $T$  时,  $f_1(t)$  在向右周期延拓并加权求和时要产生时域混叠; 当  $f_1(t)$  为时宽  $T$  的有限时宽信号时, 即  $f_1(t) = f_1(t)[u(t) - u(t-T)]$  时, 不会产生时域混叠; 如果  $f_1(t)$  为时宽  $T$  的有限时宽信号并且  $a=1$  时,  $f(t)$  是以  $f_1(t)$  为第一周期的因果周期信号, 此时式 (4.45) 简化为式 (4.27)。

**例 4.16** 已知  $F(s) = \frac{s-2}{s(s+2)^3(1-e^{-4s})}$ , 求  $f(t)$ 。

**解** 由式 (4.45) 可知

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_1(t - 4n)$$

其中,

$$f_1(t) = \left[ -\frac{1}{4} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + t^2 \right) e^{-2t} \right] u(t)$$

**例 4.17** 已知  $F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-2s})}$ , 求  $f(t)$ 。

**解** 由于

$$F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-2s})} = \frac{1-e^{-2s}}{s(1-e^{-4s})}$$

且

$$F_1(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s} \Leftrightarrow f_1(t) = G_{0,2}(t)$$

所以,  $f(t)$  是以  $f_1(t)$  为第一周期的因果周期信号, 它是个周期等于 4 的因果周期方波信号。

## 4.4 LTI系统和线性电路的s域分析

本节的许多内容几乎平行于 3.5 节关于 LTI 系统和电路频域分析的讨论, 主要差别是用复变量  $s$  取代虚变量  $j\omega$ 。

### 4.4.1 LTI系统的s域分析

#### 1. 从系统微分方程求解系统函数和冲激响应

使用拉氏变换可方便地从系统微分方程求解系统函数和冲激响应, 其计算步骤是: 首先在系统处于零状态、输入激励为单位冲激的假设下, 利用拉氏变换的时域微分性质对微分方程进行拉氏变换; 然后整理得到系统函数  $H(s) = Y(s)$ ; 最后取系统函数的拉氏逆变换后, 就得到系统的冲激响应。下面用一典型例来说明此过程。

**例 4.18** 描述系统的微分方程为  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$ , 求其系统函数和冲激响应。

**解** 在  $e(t) = \delta(t) \Leftrightarrow 1$ , 且系统处于零状态的假设下, 取系统微分方程的拉氏变换, 利用拉氏变换的时域微分定理, 有

$$s^2 I(s) + 7sI(s) + 10I(s) = s^2 + 6s + 4$$

使得

$$H(s) = I(s) = \frac{s^2 + 6s + 4}{s^2 + 7s + 10} = 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s+5} - \frac{4}{s+2} \right) \Leftrightarrow h(t) = \delta(t) + \frac{1}{3} (e^{-5t} - 4e^{-2t}) u(t)$$

#### 2. 从系统微分方程求解系统的零状态响应

当频谱为  $F(s)$  的信号  $f(t)$  通过冲激响应为  $h(t)$  的 LTI 系统时, 系统的零状态响应为

$$y(t) = f(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(s) = F(s)H(s) \quad (4.46)$$

式中, 系统函数  $H(s)$  是冲激响应  $h(t)$  的拉氏变换。下面用一例来说明使用拉氏变换从系统微分方程求解零状态响应的过程。

**例 4.19** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 5f(t)$ , 求系统在输入为



$f(t) = e^{-3t}u(t)$  下的零状态响应。

**解** 由于  $F(s) = \frac{1}{s+3}$ , 取系统微分方程的拉氏变换, 并利用拉氏变换的时域微分定理, 有

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{2s+5}{s+3}$$

这使得系统的零状态响应的拉氏变换为

$$Y_{zs}(s) = \frac{2s+5}{(s+3)(s^2+3s+2)} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1/2}{s+5}$$

则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \left[ \frac{3}{2}e^{-t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \right] u(t)$$

### 3. 从系统微分方程求解系统的零输入响应

下面用一例来说明从系统微分方程求解零输入响应的过程。

**例 4.20** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$ , 求系统在初始条件为  $y(0_-) = 1$  和  $y'(0_-) = 1$  时的零输入响应。

**解** 在零输入条件下, 利用有初始值的微分定理, 对微分方程两边取拉氏变换, 有

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) - (s+5) = 0$$

这使得系统的零输入响应的拉氏变换及对应的零输入响应为

$$Y_{zi}(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+3} \Leftrightarrow y_{zi}(t) = [2e^{-t} - e^{-3t}]u(t)$$

### 4. 从系统微分方程求解系统的零状态响应、零输入响应和全响应

下面用两例来说明从系统微分方程求解零输入响应、零状态响应和全响应的过程。

**例 4.21** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + 5f(t)$ , 已知初始条件为  $y(0_-) = 2$  和  $y'(0_-) = 1$ , 输入为  $f(t) = e^{-3t}u(t)$ , 求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

**解** 由于  $F(s) = \frac{1}{s+3}$ , 取系统微分方程的拉氏变换, 并利用拉氏变换的时域微分定理, 有

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 3sY(s) - 6 + 2Y(s) = \frac{2s+5}{s+3}$$

这使得系统输出的拉氏变换为

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

其中,

$$Y_{zs}(s) = \frac{2s+5}{(s+3)(s^2+3s+2)} = \frac{3/2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1/2}{s+3}$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{2s+7}{s^2+3s+2} = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \left[ \frac{3}{2}e^{-t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t) = [5e^{-t} - 3e^{-2t}] u(t)$$

因此系统的全响应为

$$y(t) = \left[ \frac{13}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] u(t)$$

**例4.22** 描述系统的微分方程为  $i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t)$ ，求由激励  $u_s(t) = 4u(t) - 2u(-t)$  产生的零状态响应、零输入响应和全响应。

**解** 该例题本应使用双边拉氏变换，因为输入为双边信号。为了使用单边拉氏变换，首先将输入信号分解为直流分量与因果分量的叠加，即使输入信号  $u_s(t) = 2 + 2u(t)$ ，然后计算此系统对直流分量的响应，并把它加上用拉氏变换得出的由因果分量引起的零状态响应，就得到系统的全响应。把它减去用拉氏变换得出的由输入信号的因果分量  $u_{st}(t) = 4u(t)$  引起的零状态响应，就得到了系统的零输入响应。

#### (1) 全响应的计算

显然，当  $e_1(t) = 2$  时， $i_1(t) = 4/5$ 。

当系统处于零状态，并且  $e_2(t) = 2u(t) \Leftrightarrow 2/s$  时，取系统微分方程的拉氏变换，并利用拉氏变换的时域微分性质，有

$$s^2 I_2(s) + 7s I_2(s) + 10 I_2(s) = \frac{2}{s} [s^2 + 6s + 4]$$

这使得

$$I_2(s) = 2 \frac{s^2 + 6s + 4}{s(s^2 + 7s + 10)} = \frac{4/3}{s+2} - \frac{2/15}{s+5} + \frac{4}{5s} \Leftrightarrow i_2(t) = \left[ \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{4}{5} \right] u(t)$$

所以系统的全响应为

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{4}{5} + \left[ \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{4}{5} \right] u(t)$$

当  $t > 0$  时，它为

$$i(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5}$$

#### (2) 零状态响应的计算

由于系统对输入  $e_2(t) = 2u(t)$  的零状态响应是  $i_2(t)$ ，所以根据零状态线性性质，有系统对输入信号的因果分量  $e_+(t) = 4u(t) = 2e_2(t)$  的零状态响应，也就是系统的零状态响应，为

$$i_{zs}(t) = 2i_2(t) = \left( \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5} \right) u(t)$$

(3)零输入响应的计算

最后有

$$i_{zi}(t)=i(t)-i_{zs}(t)=\left[-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{2}{15}\mathrm{e}^{-5t}\right]u(t)$$

可见，用拉氏变换计算的结果与 2.1 节所述的时域分析得出的结果完全相同，但运算要简便得多；它也与 3.5 节所述的频域分析得出的结果完全相同，但表述要更简单些。要注意，在类似本题的情况中，用拉氏变换求解零输入响应比用拉氏变换求解全响应还复杂。

5. 系统时域分析和s域分析的比较

对于由式(2.48)描述的系统，表 4.3 示出了它的时域分析和  $s$  域分析的比较，从它可以清楚地看出系统时域分析法和  $s$  域分析法之间的密切联系。从例 4.22 和例 2.16 的计算可以清楚地感觉到此比较的含义。

表 4.3 系统时域分析和 s 域分析的比较

比 较 项 目	时 域	s 域
典型卷积	$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}u(t)*\mathrm{e}^{\lambda_2 t}u(t)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda_1}\cdot\frac{1}{s-\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}\right]$
	$\mathrm{e}^{\lambda t}u(t)*\mathrm{e}^{\lambda t}u(t)=te^{\lambda t}u(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{s-\lambda}\right]$
规范化系统	$h_x(t)=\mathrm{e}^{\lambda_1 t}u(t)*\mathrm{e}^{\lambda_2 t}u(t)*\cdots*\mathrm{e}^{\lambda_n t}u(t)$	$H_x(s)=\frac{1}{A(s)}=\frac{1}{\sum_{i=0}^na_is^i}=\prod_{i=1}^n\frac{1}{s-\lambda_i}$
微分定理	$[y'(t)]_+=[y_+(t)]'-y(0_-)\delta(t)$	$[y'(t)]_+\Leftrightarrow sY(s)-y(0_-)$
	$[y''(t)]_+=[y_+(t)]''-y(0_-)\delta'(t)-y'(0_-)\delta(t)$	$[y''(t)]_+\Leftrightarrow s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)$
	$[y^{(n)}(t)]_+=[y_+(t)]^{(n)}-\sum_{k=0}^{n-1}y^{(n-1-k)}(0_-)\delta^{(k)}(t)$	$[y^{(n)}(t)]_+\Leftrightarrow s^nY(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}y^{(n-1-k)}(0_-)$
冲激响应	$h(t)=\sum_{i=0}^nb_ih_x^{(n-i)}(t)=b(t)*h_x(t)$ , 其中 $b(t)=\sum_{i=0}^nb_i\delta^{(n-i)}(t)$	$H(s)=B(s)H_x(s)$ , 其中 $B(s)=\sum_{i=0}^nb_is^{n-i}$
等效零状态激励	$x_{zs}(t)=\sum_{k=0}^nb_kf^{(n-k)}(t)=b(t)*f(t)$	$X_{zs}(s)=B(s)F(s)$
零状态响应	$y_{zs}(t)=x_{zs}(t)*h_x(t)$	$Y_{zs}(s)=X_{zs}(s)H_x(s)$
等效零输入激励	$x_{zi}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\sum_{k=0}^{n-1-i}y^{(k)}(0_-)\delta^{(n-1-i-k)}(t)-\sum_{i=0}^{n-1}b_i\sum_{k=0}^{n-1-i}f^{(k)}(0_-)\delta^{(n-1-i-k)}(t)$	$X_{zi}(s)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\sum_{k=0}^{n-1-i}y^{(k)}(0_-)s^{n-1-i-k}-\sum_{i=0}^{n-1}b_i\sum_{k=0}^{n-1-i}f^{(k)}(0_-)s^{n-1-i-k}$
零输入响应	$y_{zi}(t)=x_{zi}(t)*h_x(t)$	$Y_{zi}(s)=X_{zi}(s)H_x(s)$

4.4.2 线性电路的s域分析

使用拉氏变换可以直接在  $s$  域分析线性电路，而无须建立其微分方程，这很便于实际电路的分析计算。

## 1. 典型元件的s域模型

### (1) 电容

电容特性是

$$i_C(t) = C u_C'(t) \Leftrightarrow I_C(s) = C(sU_C(s) - u_C(0_-)) \quad (4.47)$$

这使得

$$U_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{u_C(0_-)}{s} \quad (4.48)$$

于是, 其s域模型如图4.2(a)所示。

### (2) 电感

电感特性是

$$u_L(t) = L i_L'(t) \Leftrightarrow U_L(s) = L(sI_L(s) - i_L(0_-)) \quad (4.49)$$

这使得

$$I_L(s) = \frac{U_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0_-)}{s} \quad \text{即 } U_L(s) = sL I_L(s) - L i_L(0_-) \quad (4.50)$$

于是, 其s域模型如图4.2(b)所示。

### (3) 电阻

电阻特性是

$$u_R(t) = R i_R(t) \Leftrightarrow U_R(s) = R I_R(s) \quad (4.51)$$

于是, 其s域模型如图4.2(c)所示。

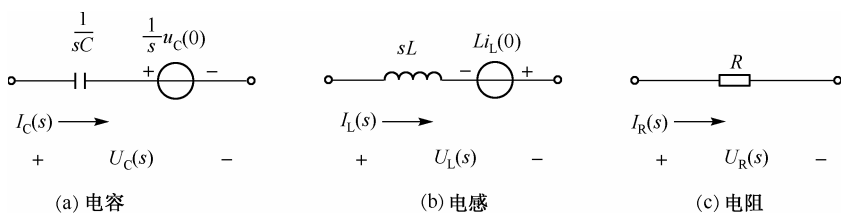


图4.2 典型元件的s域模型

## 2. s域KCL定律和KVL定律

对有  $N_i$  个支路的节点  $i$ , 有 KCL 定律

$$\sum_{k=1}^{N_i} i_{ik}(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N_i} I_{ik}(s) = 0 \quad (4.52)$$

对有  $N_i$  个支路的回路  $i$ , 有 KVL 定律

$$\sum_{k=1}^{N_i} u_{ik}(t) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N_i} U_{ik}(s) = 0 \quad (4.53)$$

### 3. 线性电路的s域分析

首先, 使用电路中各元器件的  $s$  域表示建立  $s$  域电路图; 然后, 使用  $s$  域 KCL, KVL 等电路定律建立联立的电路方程组; 最后, 从中得出所需的系统函数和被关注量的拉氏变换, 并进而分析其暂态特性、稳态特性和电路稳定性等。

下面用一典型例来说明此分析过程。

**例4.23** 计算图4.3(a)所示的微分电路、图4.3(b)所示的积分电路和图4.3(c)所示的纯相移网络的系统函数、冲激响应和阶跃响应。

**解** 根据各电路的  $s$  域零状态电路图, 有

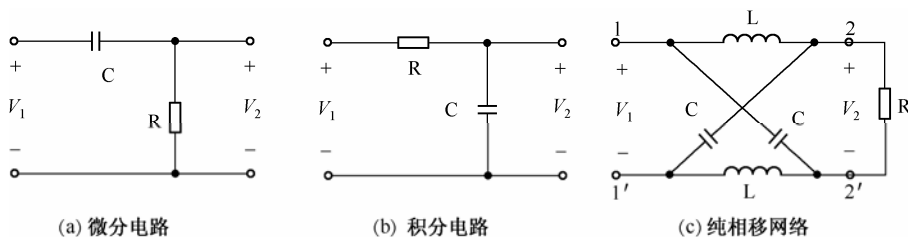


图 4.3 例 4.23 的电路

(a) 微分电路的系统函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \omega_0}$$

其对应的冲激响应为

$$h(t) = \delta(t) - \omega_0 e^{-\omega_0 t} u(t)$$

其中, 特征参数  $\omega_0 \triangleq 1/RC$ 。由于对有界输入产生有界的零状态响应, 因此它是一个稳定系统。其阶跃响应为

$$S(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s + \omega_0} \Leftrightarrow s(t) = e^{-\omega_0 t} u(t)$$

(b) 积分电路的系统函数和对应的冲激响应为

$$H(s) = \frac{1}{sC} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \Leftrightarrow h(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} u(t)$$

其阶跃响应为

$$S(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{\omega_0}{s(s + \omega_0)} \Leftrightarrow s(t) = (1 - e^{-\omega_0 t}) u(t)$$

由于对有界输入产生有界的零状态响应, 因此它是一个稳定系统。

图 4.4(a) 和 (b) 分别示出了微分电路和积分电路的阶跃响应。

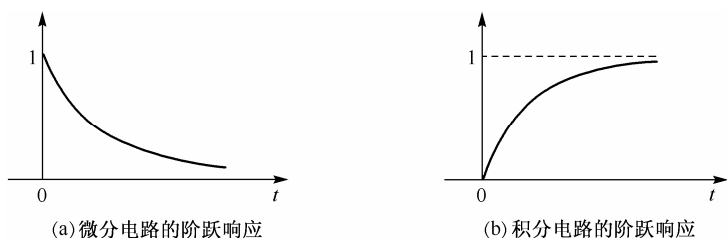


图 4.4 微分电路和积分电路的阶跃响应

(c) 纯相移网络的参数满足约束  $R = \rho = \sqrt{L/C} = \sqrt{Z_1 Z_2}$ ，其中  $Z_1 = sL$  和  $Z_2 = 1/sC$ ，即负载阻抗等于 LC 电路的特性阻抗。此时，如图 4.5 所示，从负载往网络看的等效电源的开路电压源为  $U_o(s) = V_1(s) \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ ，内阻为  $Z_o = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ ，所以系统函数和对应的冲激响应为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{U_o(s)R}{V_1(s)(Z_o + R)} = \frac{(Z_2 - Z_1)R}{(Z_1 + Z_2)R + 2Z_1 Z_2} \\ &= -\frac{Z_1 - R}{Z_1 + R} = -\frac{s - \omega_0}{s + \omega_0} \Leftrightarrow h(t) = -\delta(t) + 2\omega_0 e^{-\omega_0 t} u(t) \end{aligned}$$

其阶跃响应为

$$S(s) = \frac{H(s)}{s} = -\frac{s - \omega_0}{s(s + \omega_0)} \Leftrightarrow s(t) = (1 - 2e^{-\omega_0 t})u(t)$$

由于对有界输入产生有界的零状态响应，因此它是一个稳定系统。

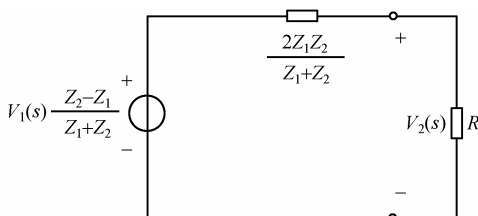


图 4.5 纯相移网络的等效电路

与第 3 章相比易知，对稳定的线性电路(及 LTI 系统)而言，系统频率响应和系统函数之间的关系是

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (4.54)$$

#### 4. 线性电路的全响应

用  $s$  域分析法不但可以确定系统的  $s$  域特性，也可以直接用于建立描述系统的微分方程，并进而计算系统的零输入响应、零状态响应和全响应。下面用一例来说明求解过程。

**例 4.24** 计算图 2.1 所示电路的以输入电压  $e(t)$  为激励、以输入电流  $i(t)$  为响应的系统的系统函数，写出相应的系统微分方程，并计算由激励  $e(t) = 4u(t) - 2u(-t)$  产生的零状态响应、零输入响应和全响应。

**解** 该电路的  $s$  域零状态等效电路如图 4.6 所示, 由 KCL 和 KVL 有

$$E(s) = I(s) \left[ R_1 + \frac{\frac{1}{sC}(R_2 + sL)}{\frac{1}{sC} + (R_2 + sL)} \right] = I(s) \left[ 1 + \frac{\frac{1}{s} \left( \frac{3}{2} + \frac{s}{4} \right)}{\frac{1}{s} + \left( \frac{3}{2} + \frac{s}{4} \right)} \right]$$

于是, 系统函数为

$$H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{s^2 + 6s + 4}{s^2 + 7s + 10}$$

它实际上是该电路的  $s$  域输入导纳函数。把它对角相乘后, 有

$$s^2 I(s) + 7sI(s) + 10I(s) = s^2 E(s) + 6sE(s) + 4E(s)$$

取它的拉氏逆变换, 并利用拉氏变换的时域微分定理, 可得系统微分方程为

$$i''(t) + 7i'(t) + 10i(t) = e''(t) + 6e'(t) + 4e(t) \quad t > 0$$

根据该微分方程, 用拉氏变换求解在所给输入下的零输入响应、零状态响应的过程参见例 4.22。

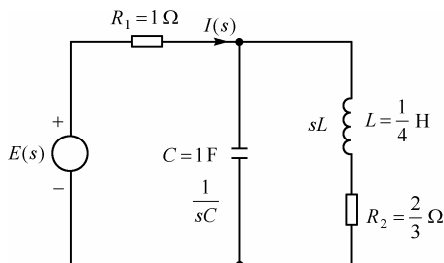


图 4.6 例 4.24 的电路

## 5. 线性电路对因果正弦信号的零状态响应

用  $s$  域分析法可以方便地计算线性电路对因果正弦信号的零状态响应, 下面用一例说明。

**例 4.25** 求图 4.7 所示 LR 串联电路以因果正弦电压  $e(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$  为输入信号、以回路电流为输出信号的零状态响应。

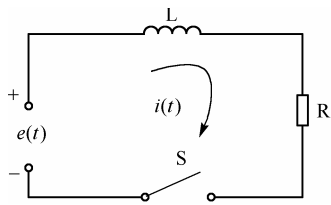


图 4.7 例 4.25 的电路

**解** 易知该电路的传递函数为

$$H(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{sL + R}$$

而

$$e(t) = \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow E(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

所以

$$I(s) = E(s)H(s) = \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)(sL + R)}$$

取拉氏逆变换后, 可知输出电流为

$$i(t) = \frac{1}{1 + Q_0^2} \left[ \sqrt{1 + Q_0^2} \sin(\omega_0 t - \arctan(Q_0)) + Q_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q_0}} \right] u(t)$$

其中, 电感品质因数  $Q_0 = \omega_0 L / R$ 。

该输出电流的暂态分量为因果指数衰减信号:

$$i_{\text{temp}}(t) = \frac{Q_0}{1 + Q_0^2} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q_0}} u(t)$$

稳态分量为因果正弦信号:

$$i_{\text{st}}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2}} \sin(\omega_0 t - \arctan(Q_0)) u(t)$$

图4.8示出了该电流的暂态分量、稳态分量和零状态响应的波形。由此可见, 暂态分量呈指数衰减地逐渐消失。

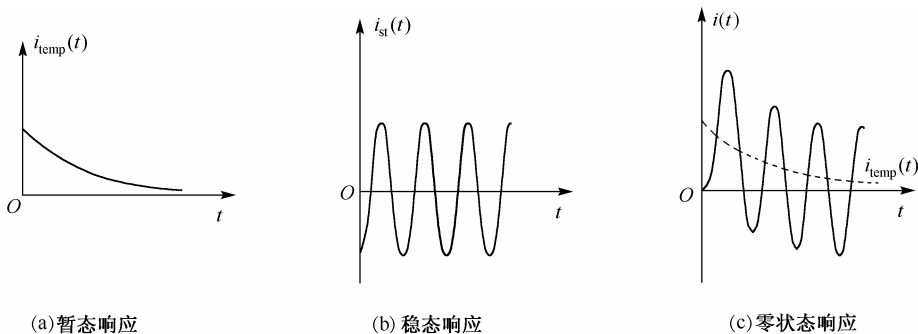


图 4.8 例 4.25 电路的回路电流

## 6. 线性电路对因果周期矩形脉冲信号的零状态响应\*

现在介绍用  $s$  域分析法计算线性电路对因果周期矩形脉冲信号的零状态响应。

**例4.26** 设图 4.9(a) 所示 RC 积分电路的输入信号为如图 4.9(b) 所示的因果周期矩形脉冲电压

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_1(t - nT)$$



其中  $e_1(t) = u(t) - u(t - \tau)$ ，求以电容电压为输出信号的零状态响应。

**解** 因果周期矩形脉冲信号  $e(t)$  的拉普拉斯变换为

$$E(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s(1 - e^{-sT})}$$

由 RC 积分构成的一阶低通滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

则系统零状态响应的拉氏变换为

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \cdot \frac{1 - e^{-s\tau}}{s(1 - e^{-sT})} = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right) \frac{1 - e^{-s\tau}}{1 - e^{-sT}}$$

显然，其暂态分量的拉氏变换为  $Y_{\text{temp}}(s) = -\frac{k_1}{s + \alpha}$ ，其中

$$k_1 = \frac{1 - e^{\alpha\tau}}{1 - e^{\alpha T}} = \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{1 - e^{-\alpha T}} e^{-\alpha(T-\tau)} > 0$$

并且  $k_1 e^{\alpha(T-\tau)} < 1$ ，其拉氏逆变换给出系统零状态响应的稳态分量为

$$y_{\text{temp}}(t) = -k_1 e^{-\alpha t} u(t)$$

把它代入  $Y_{\text{st}}(s) = Y(s) - Y_{\text{temp}}(s)$  后，可得稳态分量的拉氏变换为

$$Y_{\text{st}}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \left( \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} - \frac{k_2}{s + \alpha} + \frac{e^{-s\tau}}{s + \alpha} - \frac{k_1 e^{-sT}}{s + \alpha} \right)$$

其中，

$$k_2 = \frac{e^{\alpha T} - e^{\alpha\tau}}{e^{\alpha T} - 1} = \frac{1 - e^{-\alpha(T-\tau)}}{1 - e^{-\alpha T}} = 1 - k_1 > 0$$

所以系统零状态响应的稳态分量为

$$y_{\text{st}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_{\text{st1}}(t - nT)$$

其中， $y_{\text{st1}}(t) = (1 - k_2 e^{-\alpha t})u(t) + (1 - e^{-\alpha(t-\tau)})u(t - \tau) - k_1 e^{-\alpha(t-T)}u(t - T)$

容易验证，它是长  $T$  的有限长信号，因此可改写为

$$y_{\text{st1}}(t) = \left[ (1 - k_2 e^{-\alpha t})u(t) + (1 - e^{-\alpha(t-\tau)})u(t - \tau) \right] [u(t) - u(t - T)]$$

图 4.9(c), (d) 和 (e) 分别示出了  $\tau < 1/\alpha$  时的系统暂态响应、稳态响应和零状态响应。

### 4.4.3 用于计算卷积的拉氏变换法

使用拉氏变换可以方便地计算两个因果信号的卷积，这就是卷积计算的拉氏变换法，如图 4.10 所示。注意，不经修改，它不适合于计算非因果信号的卷积。下面用几例说明。

**例 4.27** 用拉普拉斯变换计算卷积  $u(t - 3) * e^{-2t}u(t - 1)$ 。

解

$$u(t-3) \Leftrightarrow \frac{e^{-3s}}{s} \quad \text{和} \quad e^{-2t}u(t-1) \Leftrightarrow \frac{e^{-2-s}}{s+2}$$

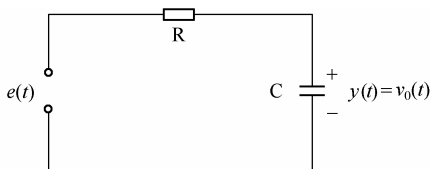
使得

$$u(t-3) * e^{-2t}u(t-1) \Leftrightarrow \frac{e^{-2-s} \cdot e^{-3s}}{s(s+2)} = \frac{e^{-2}}{2} e^{-4s} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right]$$

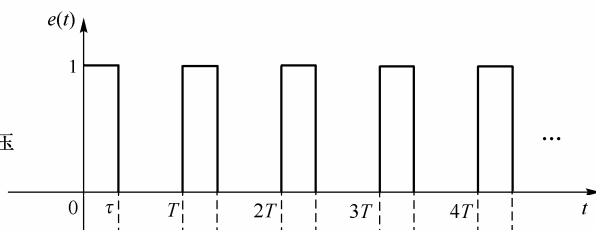
因此

$$u(t-3) * e^{-2t}u(t-1) = \frac{e^{-2}}{2} [1 - e^{-2(t-4)}] u(t-4)$$

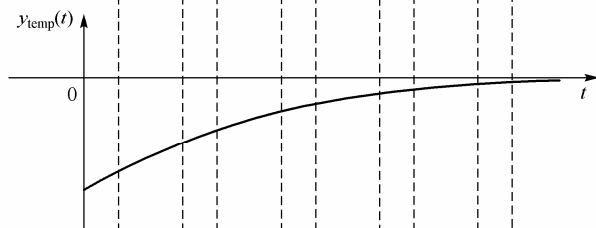
(a) 积分电路



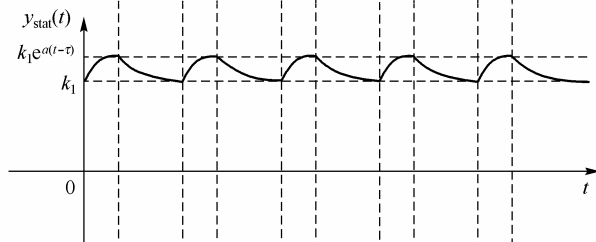
(b) 输入因果周期矩形脉冲电压



(c) 输入暂态响应



(d) 输入稳态响应



(e) 输出电容电压

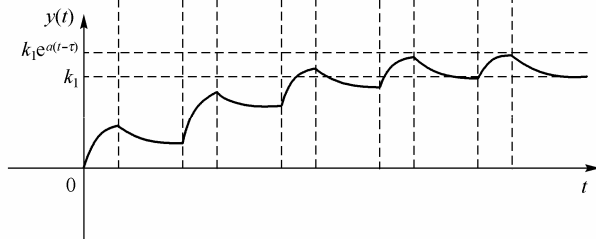


图 4.9 RC 积分电路对因果周期矩形脉冲电压的响应

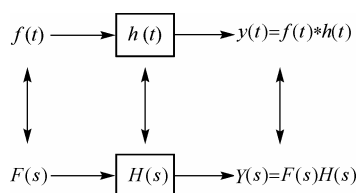


图 4.10 用拉氏变换计算卷积

**例 4.28** 计算图 4.11 (a) 所示的窗函数与图 4.11 (b) 所示的窗函数的卷积。

**解** 把两信号都向右平移 1, 然后取拉氏变换, 有

$$f_1(t-1) = \tilde{f}_1(t) \Leftrightarrow \tilde{F}_1(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s}$$

和

$$f_2(t-1) = \tilde{f}_2(t) \Leftrightarrow \tilde{F}_2(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s}$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(s)\tilde{F}_2(s) &= \frac{1 - e^{-2s}}{s} \cdot \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} \\ &= \frac{1 - e^{-4s} - 2(e^{-s} - e^{-3s})}{s^2} \end{aligned}$$

故

$$\tilde{f}_1(t) * \tilde{f}_2(t) = r(t) - 2r(t-1) + 2r(t-3) - r(t-4)$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) = r(t+2) - 2r(t+1) + 2r(t-1) - r(t-2)$$

其波形如图 4.11 (c) 所示。

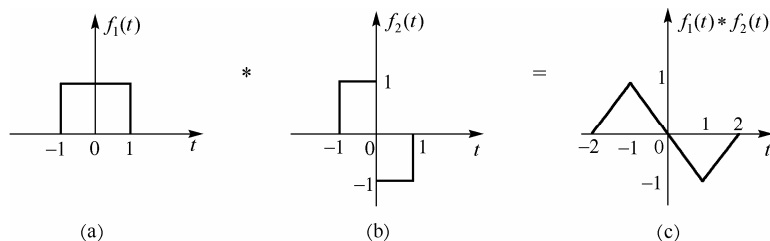


图 4.11 例 4.28 的卷积计算

显然, 借助拉氏变换计算两个因果信号的卷积比借助傅里叶变换计算要简便一些, 但是, 计算非因果信号的卷积时使用傅里叶变换可能会更简便一些。

#### 4.4.4 系统稳定性

可以证明, LTI 系统稳定的充要条件是冲激响应绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \quad (4.55)$$

对于因果 LTI 系统稳定性而言, 用冲激响应绝对可积条件  $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$  判断与用冲激响应衰减条件  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$  判断得出的结果一样。由于后者便于使用, 因此我们使用后者进行

稳定性判断。

### 1. 系统的零、极点分布

一般的  $n$  阶 LTI 系统的微分方程为

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)}(t) = \sum_{r=0}^n b_r f^{(n-r)}(t) \quad (4.56)$$

式中,  $a_0=1$ , 则其系统函数为

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4.57)$$

它也可改写为

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{-1} + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} + b_n s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}} \quad (4.58)$$

使用因式分解定理后, 式(4.57)可表示为

$$H(s) = \frac{b_0 \prod_{j=1}^n (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4.59)$$

式中,  $z_j$  是系统函数的第  $j$  个零点;  $p_i$  是系统函数的第  $i$  个极点。从式(4.59)可以看出, 除了一个常数外, 零、极点分布完全确定了系统函数。

### 2. 极点分布对系统稳定性的影响

系统函数通常如式(4.57)所示, 由部分分式分解可知, 冲激响应可以表示为因果指数信号的线性组合。

(a) 当系统不含有重极点, 即所有极点都为单重极点时, 系统的冲激响应为

$$H(s) = b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \Leftrightarrow h(t) = b_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t) \quad (4.60)$$

与实极点  $p_i$  对应的分量为  $K_i e^{p_i t} u(t)$ , 与共轭极点  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$  和  $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$  对应的分量为

$$h_i(t) = 2|K_i| e^{p_i t} \cos(\omega_i + \varphi(K_i)) u(t) \quad (4.61)$$

因此, 当极点都在左半  $s$  平面时, 冲激响应只含有指数衰减函数和指数衰减正弦振荡函数, 使得系统一定稳定。反之, 只要含有右半  $s$  平面的极点, 则一定有指数增长分量或指数增长正弦振荡分量, 使得系统一定不稳定。由于虚轴上的单阶实极点产生阶跃分量、虚轴上的单阶共轭极点产生等幅正弦振荡, 因此, 如果虚轴上只含有单阶极点并且右半  $s$  平面不含有任何极点, 则系统是临界稳定的。

图 4.12 示出了几种极点分布及其对应的响应模式。

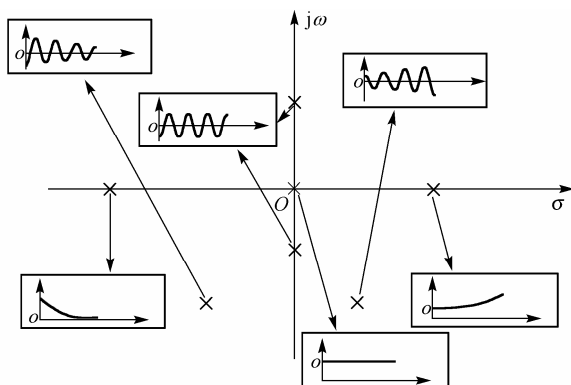


图 4.12 几种极点分布及其对应的响应模式

(b) 当系统含有重极点时, 对系统冲激响应进行如下修正。

与  $k$  重实极点  $p_i$  对应的分量为

$$h_i(t) = (K_{i0}t^{k-1} + K_{i1}t^{k-2} + \cdots + K_{i,k-1})e^{p_it}u(t) \quad (4.62)$$

与  $k$  重共轭极点  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$  和  $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$  对应的分量为

$$h_i(t) = 2e^{\alpha_it} \sum_{j=0}^{k-1} |K_{ij}| t^{k-1-j} \cos(\omega_i + \varphi(K_{ij}))u(t) \quad (4.63)$$

因此, 当所有极点(重极点)都在左半  $s$  平面时, 冲激响应只含有多项式加权的指数衰减函数和多项式加权的指数衰减正弦振荡函数, 使得系统一定稳定。反之, 若右半  $s$  平面包含极点或者虚轴包含重极点, 则系统冲激响应一定含有指数增长分量、或多项式增长分量、或多项式加权的指数增长分量、多项式加权的正弦振荡分量、或多项式加权的指数增长正弦振荡分量, 使得系统一定不稳定。

总之, 因果系统稳定的充要条件是: 所有的极点都在左半  $s$  平面。当虚轴上没有重极点, 并且  $s$  右半平面无极点时, 系统临界稳定; 当右半  $s$  平面有极点或虚轴有重极点时, 系统不稳定。

反过来说, 稳定系统的因果条件是所有极点都在左半  $s$  平面。

由于系统的零点只影响部分分式展开式中各分量的加权系数  $K_i$ , 因此它只影响冲激响应的各分量的幅度和相位, 对系统的稳定性无影响。各分量的幅度和相位要受到系统零点与极点的共同影响。

### 3. 系统的极点和激励的极点对系统响应的影响

$$\text{由于} \quad Y(s) = H(s)F(s) \Leftrightarrow y(t) = h(t) * f(t) \quad (4.64)$$

式中,  $H(s)$  如式(4.59)所示;

$$F(s) = \frac{d_f \prod_{l=1}^{m_f} (s - z_l)}{\prod_{k=1}^{n_f} (s - p_k)} \quad (4.65)$$

式中,  $n_f$  为  $F(s)$  的极点个数;  $m_f$  为其零点个数。

在没有零极点对消的情况下, 系统的极点和激励的极点共同组成了响应的极点, 使得

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^{n_f} \frac{K_k}{s - p_k} \Leftrightarrow y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t) + \sum_{k=1}^{n_f} K_k e^{p_k t} u(t) \quad (4.66)$$

由两部分组成: 前一部分的函数形式仅由系统极点决定, 称为自由响应; 后一部分的函数形式仅由激励的极点决定, 称为强迫响应。这些响应分量的幅度和相位还要受到系统的零、极点和激励的零、极点的共同影响。

当响应的拉氏变换出现零极点对消时, 例如系统的极点和激励的零点互相对消时, 系统的零状态响应中与被抵消的极点对应的自由响应分量要消失。但是在系统的零输入响应中, 由于激励为零, 激励中对消这些极点的零点不再存在, 因此这些在零状态响应中消失的自由分量会依然存在。

**例 4.29** 电路如图4.13所示, 输入信号  $v_1(t) = 10\cos(4t)u(t)$ , 求输出电压  $v_2(t)$ , 并指出  $v_2(t)$  中的自由响应和强迫响应。

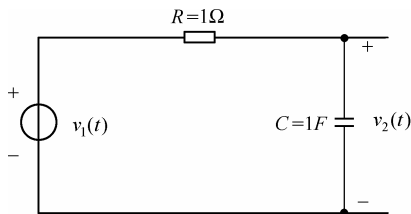


图 4.13 例 4.29 的电路

**解** 由图 4.13 可知, 系统函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s}$$

而  $v_1(t)$  的拉普拉斯变换为  $V_1(s) = \frac{10s}{s^2 + 16}$ , 所以输出信号  $v_2(t)$  的拉普拉斯变换为

$$V_2(s) = \frac{10s}{(s^2 + 16)(s + 1)} = \frac{\frac{10}{17}s + \frac{40}{17} \cdot 4}{s^2 + 16} - \frac{\frac{10}{17}}{s + 1}$$

取其逆变换后, 有

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \frac{10}{17} (\cos(4t) + 4\sin(4t) - e^{-t}) u(t) \\ &= \underbrace{-\frac{10}{17} e^{-t} u(t)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{10}{\sqrt{17}} \cos(4t - 76^\circ) u(t)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

**例 4.30** 描述系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 2f(t)$ , 已知初始条件为  $y(0_-) = 2$  和  $y'(0_-) = 1$ , 输入为  $f(t) = e^{-3t}u(t)$ , 求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

**解** 由于  $F(s) = \frac{1}{s+3}$ , 取系统微分方程的拉氏变换, 并利用拉氏变换的时域微分定理, 有

$$s^2 Y(s) - 2s - 1 + 3sY(s) - 6 + 2Y(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

这使得系统输出的拉氏变换为

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

其中

$$\begin{aligned} Y_{zs}(s) &= \frac{s+2}{(s+3)(s^2+3s+2)} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right] \end{aligned}$$

并且

$$Y_{zi}(s) = \frac{2s+7}{s^2+3s+2} = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

可知系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \right] u(t)$$

系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t) = \left[ 5e^{-t} - 3e^{-2t} \right] u(t)$$

则系统的全响应为

$$y(t) = \left( \underbrace{\frac{11}{2} e^{-t} - 3e^{-2t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-3t}}_{\text{强迫响应}} \right) u(t)$$

例 4.30 表明, 系统的极点与激励的零点互相对消使得系统的零状态响应中相应的自由响应分量  $e^{-2t}u(t)$  消失了, 但在系统的零输入响应中, 该自由分量会依然存在。

## 4.4.5 系统的方框图表示

用方框图表示一个系统, 可以直观地表示系统的入出关系和功能。复杂系统通常由许多子系统互联而成, 每个子系统可用其功能方框表示。系统方框图也称为系统实现框图。在复杂系统中, 经常用系统函数表示各功能模块, 因此用系统函数研究互联系统的特性和功能是常用的技术。

### 1. 串联系统

串联系统的系统函数是其子系统的系统函数的乘积, 而且与子系统的级联次序无关。

对图 4.14(a) 所示的串联系统, 有

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{X(s)H_2(s)}{F(s)} = \frac{F(s)H_1(s)H_2(s)}{F(s)} \\
 &= H_1(s)H_2(s)
 \end{aligned} \quad (4.67)$$

## 2. 并联系统

并联系统的系统函数是其子系统的系统函数之和。

对图 4.14(b) 所示的并联系统, 有

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{Y_1(s) + Y_2(s)}{F(s)} = \frac{F(s)H_1(s) + F(s)H_2(s)}{F(s)} \\
 &= H_1(s) + H_2(s)
 \end{aligned} \quad (4.68)$$

## 3. 反馈系统

反馈系统的系统函数是前向系统函数除以由 1 减去环路系统函数得到的差。

对图 4.14(c) 所示的反馈系统, 由于

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= E(s)H_{\text{for}}(s) = [F(s) - Y(s)H_{\text{bac}}(s)]H_{\text{for}}(s) \\
 &= F(s)H_{\text{for}}(s) - Y(s)H_{\text{bac}}(s)H_{\text{for}}(s)
 \end{aligned}$$

使得

$$[1 + H_{\text{bac}}(s)H_{\text{for}}(s)]Y(s) = F(s)H_{\text{for}}(s)$$

即

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{H_{\text{for}}(s)}{1 + H_{\text{bac}}(s)H_{\text{for}}(s)} \quad (4.69)$$

式中,  $H_{\text{for}}(s)$  为前向系统函数;  $-H_{\text{bac}}(s)H_{\text{for}}(s)$  为环路系统函数。

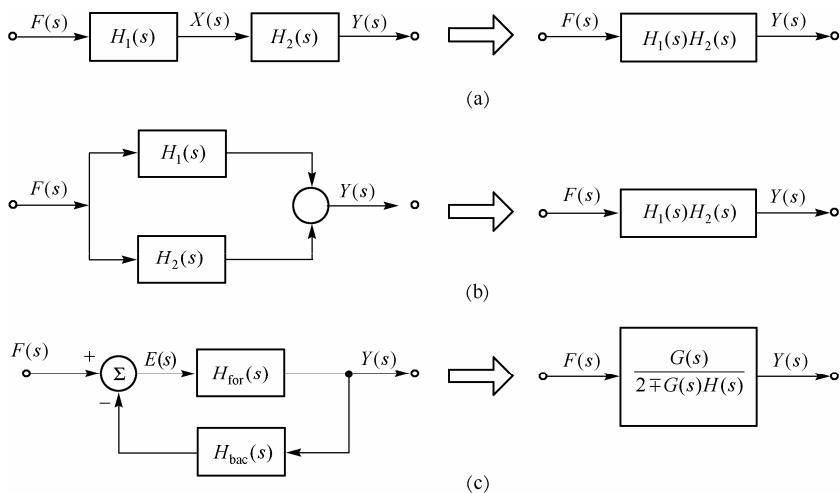


图 4.14 系统串联、并联和反馈

特殊地, 当  $H_{\text{for}}(s) = 1$  时, 有

$$H(s) = \frac{1}{1 + H_{\text{bac}}(s)} \quad (4.70)$$



当  $H_{\text{bac}}(s)=1$  时，有

$$H(s)=\frac{H_{\text{for}}(s)}{1+H_{\text{for}}(s)}$$

(4.71)

4.4.6 系统的流图表示

用流图也可以表示一个系统。系统流图是一个含有源节点和宿节点的有向路径图。在流图中，输入信号从源节点流入，经过此有向路径，从宿节点流出输出信号。流图含有若干个中间节点，节点之间由有向连支连接。每个连支表示一个子系统，连支的出发点为输入，到达点为输出。连支上标记该子系统的系统函数；当连支上标记一常数时，表示输出等于加权了此常数的输入；当默认此常数时，表示输出等于输入。当有多个有向连支汇聚于同一节点时，就发生加法运算；当有多个有向连支从同一节点出发时，该节点表示的输出量同时输向这些连支。

按照流图的规定，图4.14所示的各系统可用图4.15所示的各流图对应地表示。与系统实现框图相比，系统流图要简明得多。下面，我们一般采用系统流图表示，尤其是在第 6 章，我们都依据系统流图计算系统状态方程。

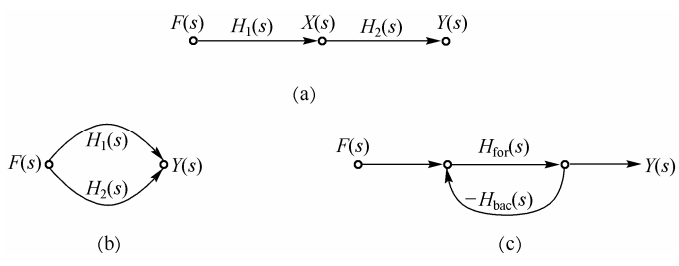


图 4.15 图 4.14 所示的各系统的系统流图

4.4.7 系统实现

许多物理系统可以用微分方程来数学建模，因此，我们可用能完成此微分方程功能的电子系统来模拟相应的物理系统，当然更可以模拟用微分方程描述的数学系统。这称为系统实现。

1. 系统实现的基本部件

系统实现通常由加法器、放大器(或衰减器)和积分器组成。它们的框图符号和功能如图 4.16 所示，其流图表示如图 4.17 所示。

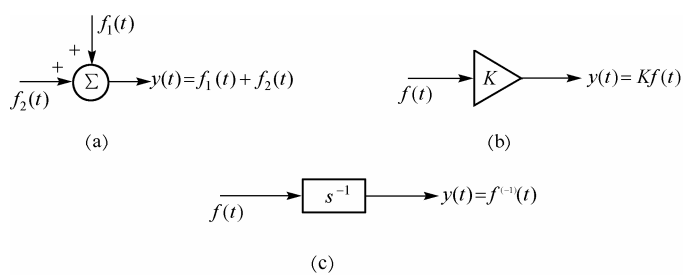


图 4.16 系统实现的基本部件的框图符号和功能

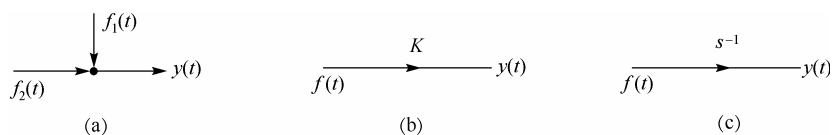


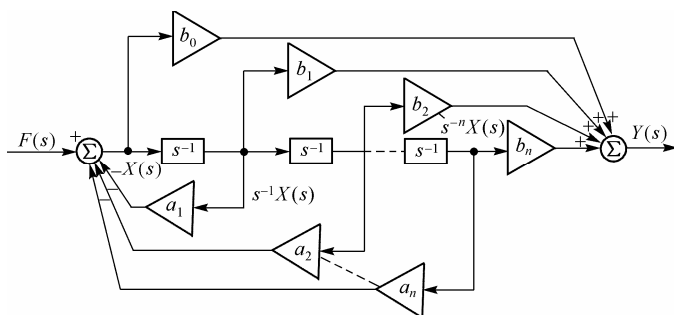
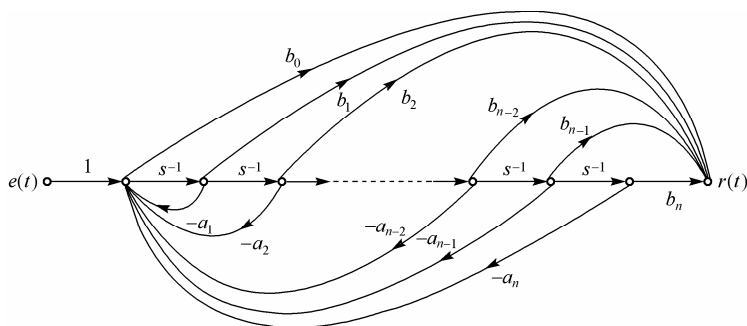
图 4.17 系统实现的基本部件的流图表示

## 2. 系统的直接型实现

系统函数如式(4.58)所示, 若令  $H_1(s) = \frac{1}{1 + H_{\text{bac}}(s)}$ , 其中  $H_{\text{bac}}(s) = a_1 s^{-1} + \dots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}$ ; 并令  $X(s) = F(s)H_1(s)$ ,  $H_2(s) = b_0 + b_1 s^{-1} + \dots + b_{n-1} s^{-(n-1)} + b_n s^{-n}$ , 则有  $Y(s) = X(s)H_2(s)$  和  $x^{(-k)}(t) \Leftrightarrow s^{-k} X(s)$ , 使得  $H(s) = H_1(s)H_2(s)$ , 并且

$$\begin{cases} x(t) = f(t) - a_1 x^{(-1)}(t) - \dots - a_{n-1} x^{(-n+1)}(t) - a_n x^{(-n)}(t) \\ y(t) = b_0 x(t) + b_1 x^{(-1)}(t) + \dots + b_{n-1} x^{(-n+1)}(t) + b_n x^{(-n)}(t) \end{cases}$$

于是有如图 4.18 所示的  $n$  阶系统模拟方框图和图 4.19 所示的  $n$  阶系统流图。

图 4.18  $n$  阶系统模拟方框图图 4.19  $n$  阶系统的流图

特殊地, 图 4.20 和 4.21 分别示出了一般二阶系统和一般一阶系统的系统流图。

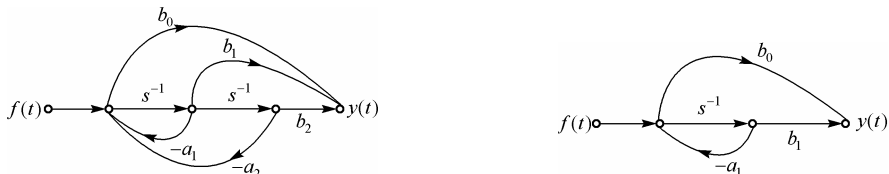


图 4.20 一般二阶系统的系统流图

图 4.21 一般一阶系统的系统流图

### 3. 系统的串联型实现

通过多项式因式分解, 可使  $n$  阶系统的系统函数写成

$$H(s) = c \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = c \prod_{k=1}^n H_k(s) \quad (4.72)$$

其中, 一阶子系统由一对零极点组成, 或仅由一个极点组成, 即  $H_k(s) = \frac{s - z_k}{s - p_k}$  或

$H_k(s) = \frac{1}{s - p_k}$ 。当零点或极点为复数时, 必有共轭零点或极点, 两个互相共轭的零极点可用一个二阶实系统  $H_k(s) = \frac{s^2 + b_{k1}s + b_{k2}}{s^2 + a_{k1}s + a_{k2}}$  实现, 或共轭极点可用一个二阶实系统

$H_k(s) = \frac{1}{s^2 + a_{k1}s + a_{k2}}$  实现。总之, 一个  $n$  阶系统可用若干个一阶或二阶实系统串联组成。

$H_k(s) = \frac{1}{s^2 + a_{k1}s + a_{k2}}$  实现。总之, 一个  $n$  阶系统可用若干个一阶或二阶实系统串联组成。

**例 4.31** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ , 求其串联实现的系统流图。

**解** 改写系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \left(1 + \frac{1}{s+3}\right)$ , 它由三个子系统  $\frac{1}{s+1}$ ,  $\frac{1}{s+2}$  和  $1 + \frac{1}{s+3}$  串联组成, 其流图如图 4.22 所示。

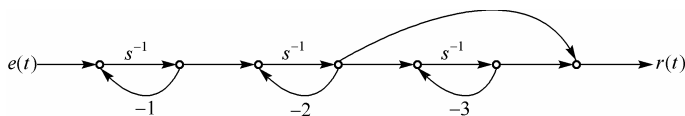


图 4.22 例 4.31 的流图

### 4. 系统的并联型实现

同样地, 由多项式的部分分式分解定理可知, 当系统节点都是单极点时  $n$  阶系统的系统函数为

$$H(s) = b_0 + \sum_{i=1}^n H_i(s) \quad (4.73)$$

其中, 当实极点  $p_i$  为实数时, 子系统  $H_i(s) = \frac{K_i}{s - p_i}$  可用一个一阶实系统实现; 共轭极点对可用一个二阶实系统  $H_k(s) = \frac{K_k}{s - p_k} + \frac{K_k^*}{s - p_k^*} = \frac{b_{k1}s + b_{k2}}{s^2 + a_{k1}s + a_{k2}}$  实现, 使得一个  $n$  阶系统可用若干个一阶或二阶实系统并联组成。

用一个二阶实系统  $H_k(s) = \frac{K_k}{s - p_k} + \frac{K_k^*}{s - p_k^*} = \frac{b_{k1}s + b_{k2}}{s^2 + a_{k1}s + a_{k2}}$  实现, 使得一个  $n$  阶系统可用若干个一阶或二阶实系统并联组成。

用一个一阶或二阶实系统并联组成。

**例 4.32** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{s+4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ , 画出其并联实现的系统流图。

**解** 由部分分式分解有

$$H(s) = \frac{1.5}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{0.5}{s+3}$$

其并联实现的系统流程图如图 4.23 所示。

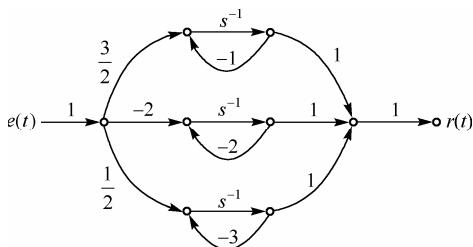


图 4.23 例 4.32 的流图

### 5. 系统的并串型实现

在有重极点的情况下，部分分式分解可把系统函数分解为低阶子系统的并联，即

$$H(s) = b_0 + \sum_i H_i(s)$$

其中， $H_i(s)$  为与极点  $p_i$  相应的子系统。对于单极点而言，有

$$H_i(s) = \frac{k_i}{s - p_i}$$

而对于  $q$  重极点而言有

$$H_i(s) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{k_{ij}}{(s - p_i)^{q-j}} \quad (4.74)$$

因此，整个系统是子系统的并联，但其中与重极点相应的子系统用串联结构实现，所以可称这样的实现为并串联型结构。下面用一个典型例来说明。

**例 4.33** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{s+4}{(s+1)^3(s+2)(s+3)}$ ，画出其并串联型实现的系统流图。

**解** 由部分分式分解有

$$H(s) = \frac{3/2}{(s+1)^3} + \frac{-4/7}{(s+1)^2} + \frac{15/8}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1/8}{s+3}$$

其流图如图 4.24 所示，它具有并串联结构。

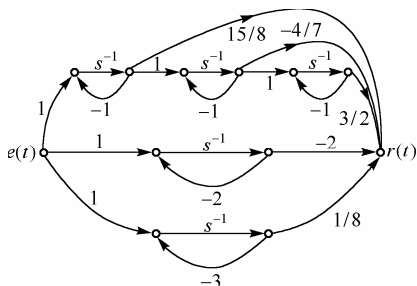


图 4.24 例 4.33 的流图

## 4.5 全通网络和最小相位网络的零、极点分布<sup>\*</sup>

系统函数取决于零、极点分布,并由式(4.56)表示,从系统稳定性的讨论可知,为确保系统稳定,所有极点必须位于左半  $s$  平面。因此,稳定系统有频率传递函数

$$H(j\omega) = \frac{c \prod_{i=1}^m (j\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} \quad (4.75)$$

式中,所有极点均满足  $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$ 。

### 4.5.1 全通网络

全通数字滤波器是零点个数与极点个数相等、并且零点与极点配对地关于虚轴对称的滤波器,即所有零极点都对满足  $(p_i, z_i) = (-\alpha_i + j\omega_i, \alpha_i + j\omega_i)$ , 其中  $\alpha_i > 0$ 。因此,它可表示为

$$H(j\omega) = A \prod_{i=1}^{M_r} \frac{[j(\omega - \omega_i) - \alpha_i][j(\omega + \omega_i) - \alpha_i]}{[j(\omega - \omega_i) + \alpha_i][j(\omega + \omega_i) + \alpha_i]} \prod_{i=1}^{M_c} \frac{\alpha_i - j\omega}{\alpha_i + j\omega} \quad (4.76)$$

式中,  $A$  为常数;  $M_r$  为由实零极点对组成的一阶全通节的个数和  $M_c$  为四对称的复零极点组构成的二阶全通节的个数。

由图 4.25 可知,由四对称的复零极点组构成的二阶全通滤波节

$$\frac{[j(\omega - \omega_i) - \alpha_i][j(\omega + \omega_i) - \alpha_i]}{[j(\omega - \omega_i) + \alpha_i][j(\omega + \omega_i) + \alpha_i]} = \exp\{j\varphi_{ci}(\omega)\} \quad (4.77)$$

在  $\omega - \omega_i < 0$  时有相移函数

$$\varphi_{ci}(j\omega) = 2 \arctan\left(\frac{|\omega - \omega_i|}{\alpha_i}\right) - 2 \arctan\left(\frac{\omega + \omega_i}{\alpha_i}\right) < 0 \quad \omega > 0 \quad (4.78)$$

在  $\omega - \omega_i > 0$  时有相移函数

$$\varphi_{ci}(j\omega) = 2\pi - 2 \arctan\left(\frac{|\omega - \omega_i|}{\alpha_i}\right) - 2 \arctan\left(\frac{\omega + \omega_i}{\alpha_i}\right) \quad (4.79)$$

从式(4.78)和式(4.79)可知,相移函数在  $\omega = \omega_i$  处产生了  $2\pi$  的阶跃量。去除此阶跃量,就得到相应的连续相频特性

$$\varphi_{ci}(j\omega) = -2 \operatorname{sgn}(\omega - \omega_i) \arctan\left(\frac{|\omega - \omega_i|}{\alpha_i}\right) - 2 \arctan\left(\frac{\omega + \omega_i}{\alpha_i}\right) < 0 \quad \omega > 0 \quad (4.80)$$

这意味着二阶全通滤波器的连续相位函数总是负的。

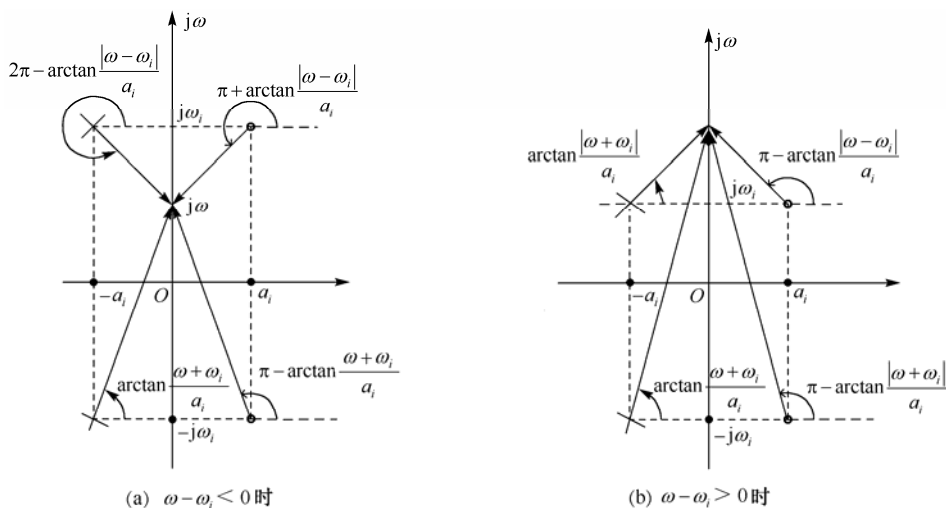


图 4.25 二阶全通节的相移

如图 4.26 所示, 由关于虚轴对称零极点对构成的一阶全通滤波节

$$\frac{\alpha_i - j\omega}{\alpha_i + j\omega} = \exp\{j\varphi_{ri}(\omega)\} \quad \alpha_i > 0 \quad (4.81)$$

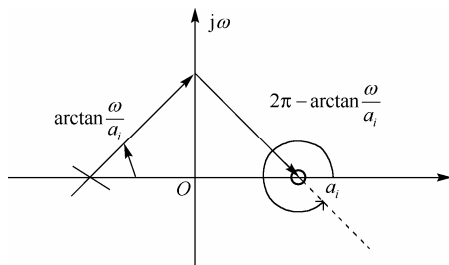


图 4.26 一阶全通节的相移

有相位函数

$$\varphi_{ri}(\omega) = 2\pi - 2\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha_i}\right) \quad (4.82)$$

从式 (4.81) 和式 (4.82) 可知, 相移函数在  $\omega = 0$  处产生了  $2\pi$  的阶跃量。去除此阶跃量, 就得到相应的连续相频特性

$$\varphi_{ri}(\omega) = -2\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha_i}\right) < 0 \quad \omega > 0 \quad (4.83)$$

这样, 一阶全通滤波节连续相位函数总是负的。于是, 全通滤波器的连续相位函数

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{M_r} \varphi_{ri}(\omega) + \sum_{i=1}^{M_c} \varphi_{ci}(\omega) \quad (4.84)$$

有非线性相移特性, 并且总是负的。

全通网络是一个有非线性相移特性的系统, 是一个纯相移网络。全通网络作为相位校正

网络在通信系统中用来校正信号传输过程中产生的相位失真。

### 4.5.2 最小相位系统

系统稳定性要求所有极点必须位于左半  $s$  平面。因此,当系统的幅频特性确定时,只有零点位置可供选择。

定义所有零点均处于左半  $s$  平面的因果稳定系统(即所有零、极点均位于  $z$  平面单位圆内的系统)为最小相位系统。根据此定义易知,最小相位系统是一个可逆的因果稳定系统,并且其逆系统仍是一个最小相位系统。因为最小相位系统的零、极点变成其逆系统的极、零点,使得逆系统的零、极点仍然都在左半  $s$  平面。

显然,非最小相位的因果稳定系统可以由最小相位系统级联一个使零点移到单位圆外的全通滤波器构成,该全通滤波器的极点为最小相位系统的零点,以此对消原有零点,全通滤波器的零点与其极点关于  $s$  平面的虚轴对称。由 4.5.1 节的讨论可知,对所有的  $\omega \in (0, +\infty)$ ,全通滤波器的连续相位函数总是非正的。因此,把零点从左半  $s$  平面反射到右半  $s$  平面总会使连续相位函数减小,使得相位负值(即相位滞后)增加,因此最小相位系统实际上是具有最小连续相位滞后特性的系统。更确切地,应称它为最小相位滞后系统。但由于历史的原因,习惯上仍然称为最小相位系统。

同样地,可称具有最小相位特性的信号为最小相位信号。

3.6 节指出了最小相位信号的对数幅度谱和相位谱存在希尔伯特关系,但只给出了启发式说明。这里用零、极点概念证明复倒谱的因果稳定性。把式  $H(s) = B(s)/A(s)$  代入  $-\frac{d}{ds} \ln H(s)$  后,有

$$-\frac{d}{ds} \ln H(s) = -\frac{d}{ds} \ln B(s) + \frac{d}{ds} \ln A(s) = \frac{1}{A(s)} \frac{d}{ds} A(s) - \frac{1}{B(s)} \frac{d}{ds} B(s)$$

使得  $H(s)$  的零、极点都成为  $-\frac{d}{ds} \ln H(s)$  的极点。这样,  $\hat{th}(s)$  的因果稳定性要求原系统的零、极点全在左半平面,即要求信号是一个最小相位信号。因此,当信号是一个最小相位信号时,  $\hat{th}(t)$  是因果稳定的,从而使复倒谱  $\hat{h}(s)$  是因果稳定的,因此最小相位信号的对数幅度谱与相位谱有希尔伯特关系。

最小相位网络在功率谱估计及语音信号合成中有着重要的应用。它也可以用于从幅度谱重建相应的最小相位信号。

## 4.6 拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系

### 4.6.1 双边拉普拉斯变换

双边信号  $f(t)$  ( $-\infty \leq t < +\infty$ ) 的拉普拉斯变换  $F(s)$  定义为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.85)$$

它是指数加权后的信号  $e^{-\sigma t} f(t)$  ( $-\infty \leq t < +\infty$ ) 的傅里叶变换。其逆变换公式仍是式(4.2)。

对于双边拉普拉斯变换,特别要表明收敛域,这是因为有不同收敛域的同一个人 $F(s)$ 对应于两个完全不同的信号。

显然,可以认为(单边)拉普拉斯变换是因果信号或信号的因果分量 $f(t)u(t)$ 的双边拉普拉斯变换。

**例 4.34** 计算(1)  $f(t) = u(t) + e^t u(-t)$ , (2)  $f(t) = e^{at} u(t) + e^{bt} u(-t)$  的双边拉普拉斯变换。

**解** 根据定义,有

$$(1) F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-s)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \quad 0 < \sigma < 1$$

$$(2) \text{当 } b > a \text{ 时, } F(s) = \int_{-\infty}^0 e^{(b-s)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{b-s} - \frac{1}{a-s} \quad a < \sigma < b$$

而当 $b \leq a$ 时,收敛域不存在,使得双边拉普拉斯变换也不存在。

**例 4.35** 计算 $F(s) = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s}$ 在不同收敛域时对应的原信号。

**解** 由例 4.34 可知,当 $0 < \sigma < 1$ 时, $f(t) = u(t) + e^t u(-t)$ 为双边信号;当 $1 < \sigma$ 时,易知 $f(t) = (1 - e^t)u(t)$ 为因果信号;而当 $\sigma < 0$ 时,易知 $f(t) = (e^t - 1)u(-t)$ 为反因果信号。

由本例可见,三个不同的收敛域对应三类不同的信号。可以证明,收敛域为右平面时对应因果信号,收敛域为左平面时对应反因果信号,而带状收敛域对应双边信号。

显然,对于因果信号而言,双边拉普拉斯变换等同于单边拉普拉斯变换。

## 4.6.2 拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系

拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系如图 4.27 所示。

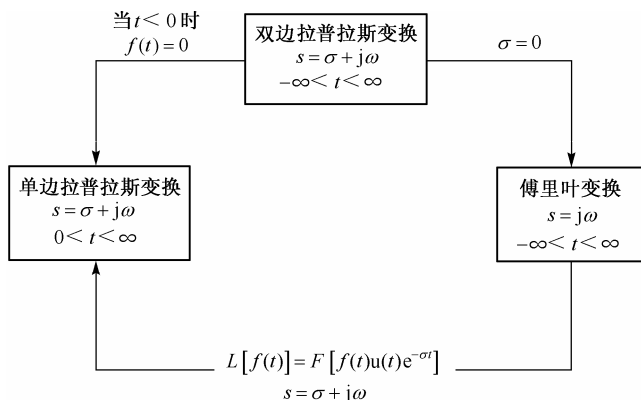


图 4.27 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系

### 1. 双边拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系

比较双边拉普拉斯变换和傅里叶变换的定义,容易看出,傅里叶变换是双边拉普拉斯变换在取 $s = j\omega$ 时的特例,而双边拉普拉斯变换是取 $e^{-\sigma t} f(t)$ 的傅里叶变换,即双边拉普拉斯变换实际是非因果信号的广义傅里叶变换。



## 2. 单边拉普拉斯变换和傅里叶变换的对应关系

从定义来看, 单边拉普拉斯变换是  $e^{-\sigma t} f(t)u(t)$  的傅里叶变换, 因此, 它是因果信号或信号因果分量的广义傅里叶变换。对于因果信号而言, 其双边拉普拉斯变换等同于其单边拉普拉斯变换。

根据拉普拉斯变换的收敛域 ( $\sigma > \sigma_0$ ), 从拉普拉斯变换计算对应的傅里叶变换, 要分以下三种情况讨论。

### (1) $\sigma_0 > 0$ (收敛边界落于右半 $s$ 平面)

此时, 对应的时域信号为因果增长信号, 它有单边拉普拉斯变换, 却没有傅里叶变换。因此, 切忌盲目地从拉普拉斯变换计算傅里叶变换。

### (2) $\sigma_0 < 0$ (收敛边界落于左半 $s$ 平面)

此时, 对应的时域信号为因果衰减信号, 它有单边拉普拉斯变换, 也有傅里叶变换; 并且, 只要简单地令  $s = j\omega$ , 就可从拉普拉斯变换计算相应的傅里叶变换。

**例 4.36** 已知  $e^{-\alpha t}u(t)$  和  $e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)u(t)$  的拉普拉斯变换分别为  $\frac{1}{s+\alpha}$  和  $\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$ ,

其中  $\alpha > 0$ , 试计算它们的傅里叶变换。

**解** 由于这两个信号的收敛域都是  $\sigma_0 = -\alpha < 0$ , 因此,  $e^{-\alpha t}u(t)$  和  $e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)u(t)$  的傅里叶变换分别为  $\frac{1}{j\omega + \alpha}$  和  $\frac{\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}$ 。这与直接从信号和傅里叶变换的定义及其性质, 计算它们的傅里叶变换的结果完全相同。

### (3) $\sigma_0 = 0$ (收敛边界落于 $s$ 平面的虚轴)

此时, 对应的时域信号含有因果阶跃信号或阶跃信号的若干次积分, 或者因果正弦信号或多项式加权的因果正弦信号。它有单边拉普拉斯变换, 也有傅里叶变换, 但不能简单地通过令  $s = j\omega$  来从拉普拉斯变换计算相应的傅里叶变换。

首先, 假设收敛边界落于  $s$  平面虚轴时,  $F(s)$  在虚轴上仅有  $N$  个单极点, 则通过部分分式分解, 有

$$F(s) = F_a(s) + \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{s - j\omega_n} \Leftrightarrow f(t) = f_a(t) + \sum_{n=1}^N K_n e^{-j\omega_n t} u(t) \quad (4.86)$$

这使得信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_a(j\omega) + \sum_{n=1}^N K_n \delta(\omega - \omega_n) * \left[ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega_n} \right] \\ &= F_a(j\omega) + \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{j(\omega - \omega_n)} + \sum_{n=1}^N K_n \pi \delta(\omega - \omega_n) \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \sum_{n=1}^N K_n \pi \delta(\omega - \omega_n) \quad (4.87)$$

**例 4.37** 已知  $\sin(\omega_0 t)u(t)$  的拉普拉斯变换为  $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$ , 试计算其傅里叶变换。

**解** 利用式 (4.87), 可知其傅里叶变换为

$$F[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2} + j\frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

这与直接从信号和傅里叶变换的定义及其性质, 计算其傅里叶变换的结果完全相同。

然后, 假设  $F(s)$  仅在虚轴上的  $\omega_0$  和  $-\omega_0$  处有  $k$  重极点, 即

$$F(s) = F_a(s) + \frac{K_0}{(s - j\omega_0)^k} + \frac{K_0^*}{(s + j\omega_0)^k} \Leftrightarrow f(t) = f_a(t) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} [K_0 e^{j\omega_0 t} + K_0^* e^{-j\omega_0 t}] u(t)$$

其中利用了

$$(-t)^{k-1} e^{j\omega_0 t} u(t) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{s - j\omega_0} \right)^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(s - j\omega_0)^k}$$

于是, 该信号的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \frac{\pi j^{k-1}}{(k-1)!} [K_0 \delta^{(k-1)}(\omega - \omega_0) + K_0^* \delta^{(k-1)}(\omega + \omega_0)] \quad (4.88)$$

其中利用了

$$(-jt)^{k-1} e^{j\omega_0 t} u(t) \Leftrightarrow \pi \delta^{(k-1)}(\omega - \omega_0) + \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{j(\omega - \omega_0)^k}$$

当  $\omega_0 = 0$  时, 式 (4.88) 简化为

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \frac{\pi j^{k-1}}{(k-1)!} K_0 \delta^{(k-1)}(\omega) \quad (4.89)$$

**例 4.38** 已知  $tu(t)$  的拉普拉斯变换为  $1/s^2$ , 试计算其傅里叶变换。

**解** 利用式 (4.89), 可知其傅里叶变换为

$$F[tu(t)] = -\frac{1}{\omega^2} + j\pi \delta'(\omega)$$

这与直接从信号和傅里叶变换的定义及其性质, 计算其傅里叶变换的结果完全相同。

## 本章小结

1. 非周期信号的拉普拉斯变换是用因果指数衰减信号加权后的信号的傅里叶变换, 它是把信号的因果分量分解为无穷多个因果复指数分量的叠加(积分), 指数衰减信号加权的结果是使拉普拉斯变换能用于分析一大类不能用傅里叶变换进行分析的信号和系统。

2. 信号的拉普拉斯变换和傅里叶变换具有对应性。

3. 拉普拉斯变换有许多性质, 它们在计算拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换中有重要作用,

必须熟练掌握。

4.  $s$  域分析不但可用来分析 LTI 系统的  $s$  域特性——系统函数, 并且可用于计算卷积、反卷积, 计算系统的冲激响应、阶跃响应、零输入响应、零状态响应和全响应等, 它要比时域分析技术简便有效得多, 而且在表述上比频域分析更简捷, 可应用范围更广。

5. 各元器件都有自己的  $s$  域模型, 使得电路可在  $s$  域中直接进行分析。而且, 在  $s$  域中求解电路要比时域分析技术简便有效得多。

6. 拉普拉斯变换可有效地用于 LTI 系统的实现, 可用直接型、串联型、并联型或串并型结构实现。该实现可用系统实现框图表示, 也可更简捷地用系统流图表示。

7. 可以通过系统函数的极点分布来分析系统稳定性和通过极、零点分布分析系统的频率特性。

8. 双边信号的双边拉普拉斯变换收敛于  $\sigma_- < \sigma < \sigma_+$ , 反因果信号的双边拉普拉斯变换收敛于  $\sigma < \sigma_+$ , 而因果信号的双边拉普拉斯变换就是单边拉普拉斯变换, 它收敛于  $\sigma_- < \sigma$ 。

9. 拉普拉斯变换是广义傅里叶变换。当极点全在左半  $s$  平面时, 傅里叶变换是拉普拉斯变换的特例, 即  $F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ ; 当在右半  $s$  平面无极点、但在虚轴上有极点时, 还要考虑虚轴上的极点引起的频域冲激及其导数项; 当右半  $s$  平面有极点时, 不能从拉普拉斯变换计算其傅里叶变换, 因为此时不存在傅里叶变换。

10. 全通网络是零、极点对关于虚轴对称的系统, 最小相移网络是零、极点全在左半  $s$  平面的系统, 其对数幅频特性与相频特性构成希尔伯特关系。

## 习 题

4.1 计算下列信号的拉普拉斯变换。

(a)  $f(t) = (1 - e^{-\sigma t})u(t)$

(b)  $f(t) = te^{-\sigma t}u(t)$

(c)  $f(t) = 2e^{-5t} \sin(4\pi t)u(t)$

(d)  $f(t) = [\sin(2t) + 3\cos(2t)]u(t)$

(e)  $f(t) = \left[1 + 2\cos(t) + 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right]u(t)$

(f)  $f(t) = te^{-2(t-2)}u(t-1)$

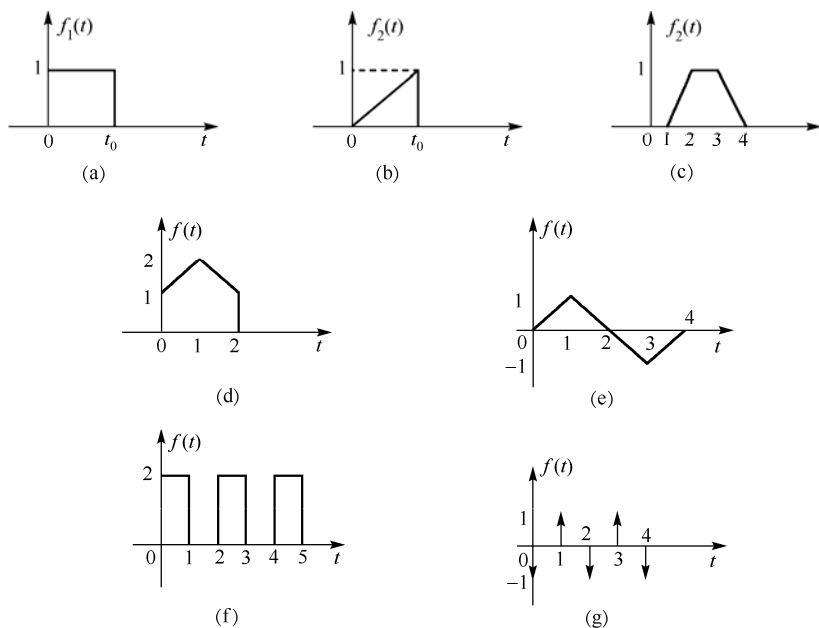
(g)  $f(t) = (1 - \cos(\alpha t))e^{-\beta t}u(t)$

(h)  $f(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{t}u(t)$

(i)  $f(t) = (e^t - e^{-t})u(t)$

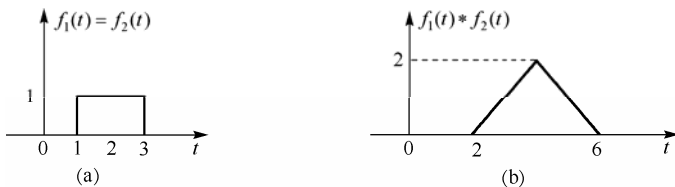
(j)  $f(t) = 2\delta(t) - e^{-t}u(t)$

4.2 求题图 4.2 所示各信号的拉普拉斯变换。



题图 4.2

4.3 已知  $f_1(t) = f_2(t) = u(t-1) - u(t-3)$  的波形如题图 4.3(a) 所示, 利用卷积定理证明  $f_1(t) * f_2(t)$  的结果为如题图 4.3(b) 所示的三角脉冲。

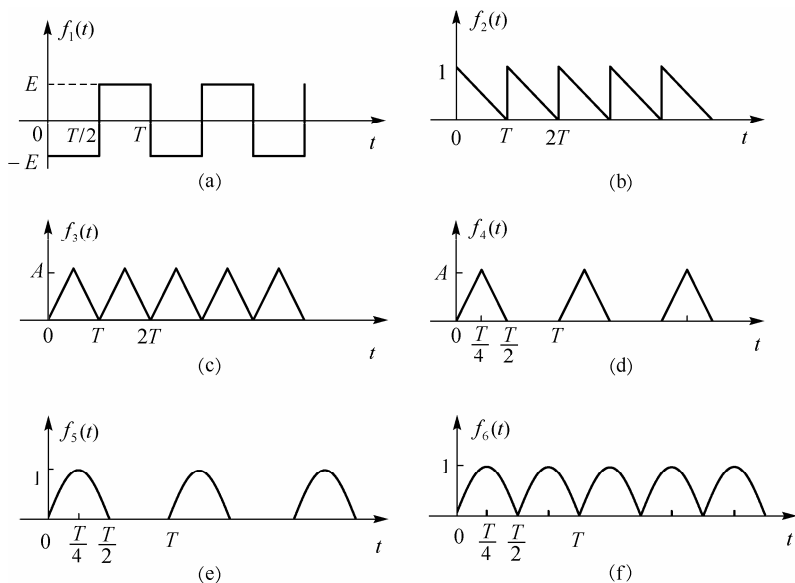


题图 4.3

4.4 用  $s$  域分析技术计算下列卷积:

- |  |  |
|--|--|
| (1) $e^{-3t}u(t) * e^{-5t}u(t)$            | (2) $t^2 e^{-t}u(t) * \delta'(t)$      |
| (3) $[u(t) - u(t-4)] * \sin(\omega t)u(t)$ | (4) $e^{-at}u(t) * \sin(\omega t)u(t)$ |
| (5) $[u(t-1) - u(t-2)] * [u(t) - u(t-4)]$  |  |

4.5 求题图 4.5 所示单边周期信号的拉普拉斯变换。



题图 4.5

4.6 计算下列象函数的拉普拉斯逆变换。

$$(a) F(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

$$(b) F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

$$(c) F(s) = \frac{6}{s(s+6)}$$

$$(d) F(s) = \frac{4s+2}{s^2+8}$$

$$(e) F(s) = \frac{2s^2+s+2}{s(s^2+1)}$$

$$(f) F(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$$

$$(g) F(s) = \frac{s^3+4s^2+3s+2}{s^2+3s+2}$$

$$(h) F(s) = 1 - e^{-2s}$$

$$(i) F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s+2}$$

$$(j) F(s) = \frac{\pi(1 - e^{-2s})}{s^2 + \pi^2}$$

$$(k) F(s) = \frac{1 - e^{-\frac{s}{2}}}{s(1 - e^{-s})}$$

$$(l) F(s) = \frac{\pi(1 - e^{-2s})}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-4s})}$$

$$(m) F(s) = \frac{s}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-4s})}$$

$$(n) F(s) = \frac{s}{(s+\alpha)[(s+\alpha)^2 + \beta^2]}$$

4.7 不经计算拉普拉斯逆变换, 求题4.6所列各象函数所对应的原函数  $f(t)$  的初值  $f(0_+)$  和终值  $f(+\infty)$ 。

4.8 已知  $F(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}$ , 其中  $\omega_0 = 1$ , 分别求: 当 (a)  $\xi = 0$ , (b)  $\xi = 0.5$ ,

(c)  $\xi = 1$ , (d)  $\xi = 2$  时,  $F(s)$  所对应的原函数  $f(t)$ , 并画出波形。

4.9 已知系统在  $f_1(t) = \sin(2t)u(t)$  激励下的零状态响应  $y_{zs1}(t) = \frac{2}{5}(e^{-t} - \cos 2t)u(t)$ , 试求在信号  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$  激励下的零状态响应  $y_{zs2}(t)$ 。

4.10 已知某连续时间 LTI 系统在激励为  $f(t) = 2e^{-2t}u(t)$  时, 其零状态响应为  $y_{zs}(t) = (2e^{-2t} - 4e^{-t} + 8e^{-3t})u(t)$ , 求系统的单位冲激响应  $h(t)$ 。

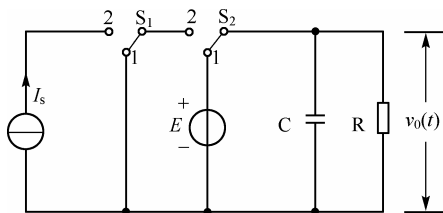
4.11 已知系统  $y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = f(t)$  的初始条件为  $y(0_+) = 1$  和  $y'(0_+) = 1$ , 激励  $f(t) = e^{-2t}u(t)$ , 用  $s$  域分析技术求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

4.12 已知系统  $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = f'(t)$  的初始条件为  $y(0_-) = 0$  和  $y'(0_-) = 1$ , 激励  $f(t) = u(t)$ , 用  $s$  域分析技术求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

4.13 已知系统函数  $H(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$ , 若  $f(t) = e^{-t}u(t)$ ,  $y(0_-) = 1$  和  $y'(0_-) = 1$ , 试用  $s$  域分析技术求系统响应  $y(t)$ 。

4.14 如题图 4.14 所示的电路, 当  $t < 0$  时, 开关  $S_1$  和  $S_2$  都置于位置 “1”, 电路已进入稳态; 当  $t = 0$  时, 开关  $S_1$  和  $S_2$  的位置切换到 “2”。已知  $R = 1\Omega$ ,  $C = 1F$ , 用  $s$  域分析技术求

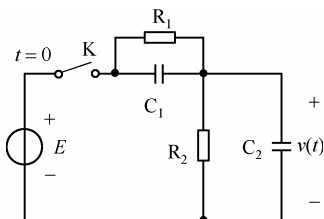
- (1) 以  $i(t)$  为响应的系统频率响应和系统微分方程;
- (2) 系统的零输入响应、零状态响应和全响应。



题图 4.14

4.15 如题图 4.15 所示的电路, 当  $t = 0$  时, 开关 K 闭合, 接入直流电压  $E$ , 求  $v(t)$ , 并讨论以下三种情况的结果。

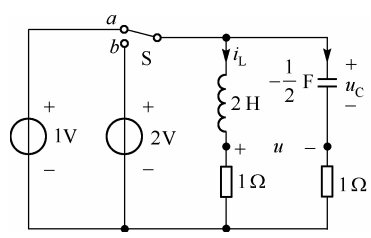
- (1)  $R_1C_1 = R_2C_2$ ;
- (2)  $R_1C_1 > R_2C_2$ ;
- (3)  $R_1C_1 < R_2C_2$



题图 4.15

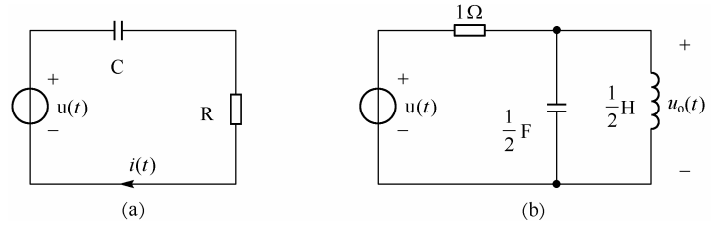
4.16 如题图 4.16 所示的电路, 当  $t < 0$  时, 开关 S 置于位置 “a”, 电路已进入稳态; 当  $t = 0$  时, 开关 S 的位置切换到 “b”。用  $s$  域分析技术求

- (1) 以  $i(t)$  为响应的系统频率响应和系统微分方程;
- (2) 系统的零输入响应、零状态响应和全响应。



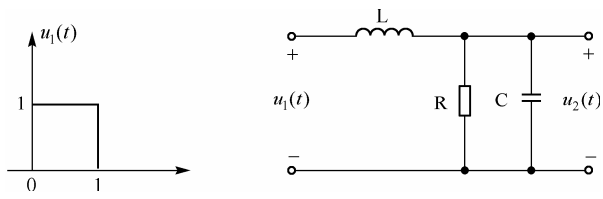
题图 4.16

4.17 求题图4.17(a)所示电路中的输出  $i(t)$  和图4.17(b)所示电路中的输出  $u_o(t)$  的零状态响应，其中  $u(t)$  为单位阶跃信号。



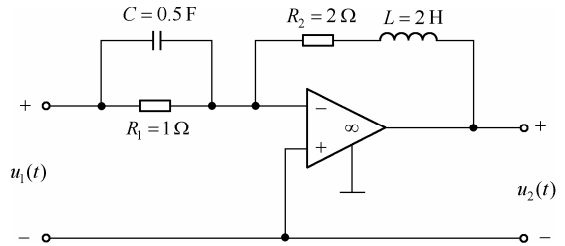
题图 4.17

4.18 如题图4.18 所示的电路，已知  $R=5\Omega$ ， $C=0.1\text{ F}$ ， $L=2\text{ H}$ ，试用拉普拉斯变换法求在  $u_1(t)$  作用下的输出电压  $u_2(t)$ 。



题图 4.18

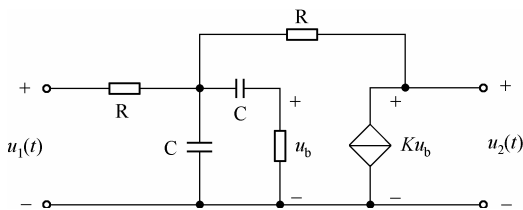
4.19 如题图4.19 所示电路的初始状态为零，要求输出满足  $u_2(t) = -[2g'(t) + 6g(t)]$ ，其中  $g(t) = e^{-t}u(t)$ 。试用拉普拉斯变换法求其输入信号  $u_1(t)$ 。



题图 4.19

4.20 如题图4.20所示的二阶有源滤波器，已知  $R=1\Omega$ ， $C=1\text{ F}$ ， $K=3$ ，试求系统函

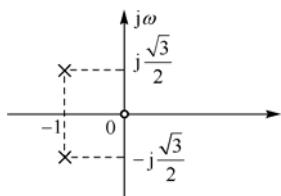
数  $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 。



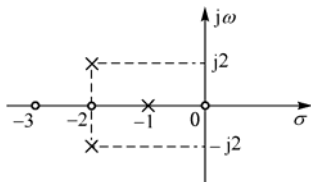
题图 4.20

4.21 已知系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如题图 4.21 所示, 若冲激响应的初值  $h(0_+) = 2$ , 求系统函数  $H(s)$ , 并确定该系统的频率特性。

4.22 已知系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如题图 4.22 所示, 且  $H(0) = 5$ , 求系统函数  $H(s)$ 。

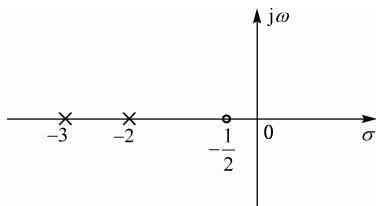


题图 4.21



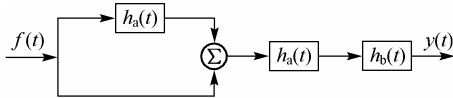
题图 4.22

4.23 已知系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如题图 4.23 所示, 且  $H(0) = 1/3$ , 求系统函数  $H(s)$ 、系统冲激响应  $h(t)$  和阶跃响应  $s(t)$ 。



题图 4.23

4.24 题图 4.24 所示系统中, 已知  $h_a(t) = \delta(t-1)$ ,  $h_b(t) = u(t) - u(t-2)$ , 求系统函数  $H(s)$  和系统冲激响应  $h(t)$ , 并画出  $h(t)$  的波形。



题图 4.24

4.25 求题图 4.25 (a), (b) 和 (c) 所示网络的系统函数  $H(s)$  和零、极点分布, 并指出各系统为哪种滤波网络?

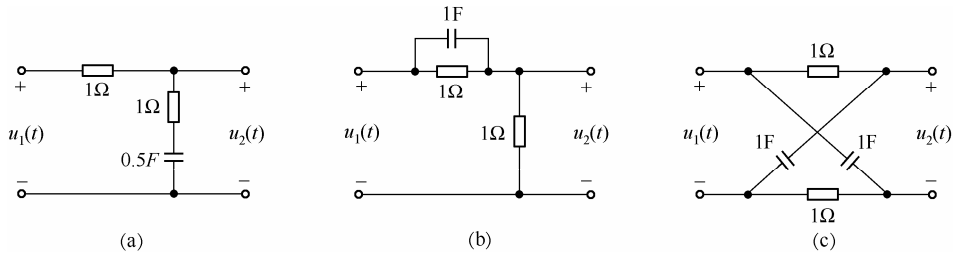
4.26 如题图 4.26 所示的电路, 电路初始储能为零, 求

(1) 系统函数  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ;

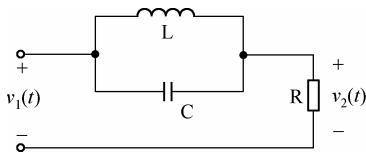
(2) 若  $v_1(t) = \cos(2t)u(t)$ , 为使  $v_2(t)$  中不出现正弦稳态分量, 求  $L$  与  $C$  的积;



(3) 若  $R=1\ \Omega, L=1\ \text{H}$ ，按条件(2)求  $v_2(t)$ 。

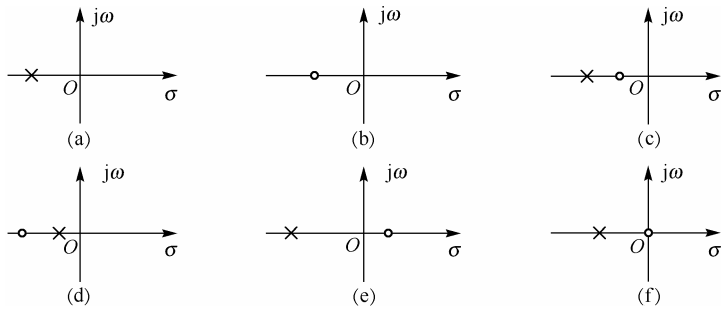


题图 4.25



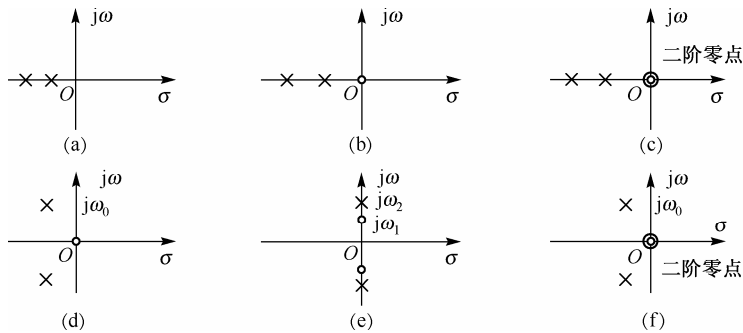
题图 4.26

4.27 给定系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如题图 4.27 所示，粗略画出系统的幅频特性和相频特性曲线。



题图 4.27

4.28 系统函数的零、极点分布如题图 4.28 所示，讨论它们分别是哪种滤波网络(低通、高通、带通、带阻)?



题图 4.28

4.29 判断下列系统的稳定性。

$$(a) \quad F(s) = \frac{s+1}{s^2+8s+6}$$
$$(b) \quad F(s) = \frac{2s + 4}{(s + 1)(s^2 + 4s + 3)}$$

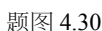
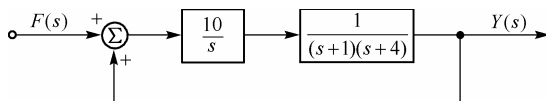
(c)  $F(s) = \frac{6}{s(s-6)}$

$$(d) \quad F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s(s^2 - 1)}$$

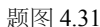
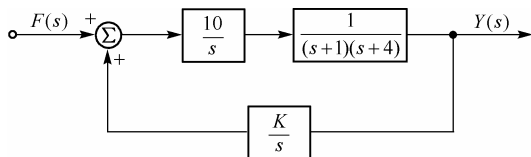
(e)  $F(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$

$$(f) \quad F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

4.30 判断题图 4.30 所示反馈系统的稳定性。

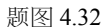
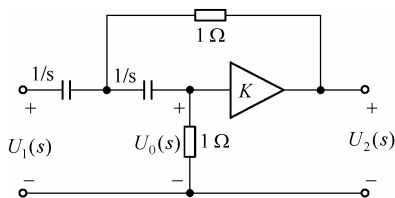


4.31 如题图 4.31 所示的反馈系统, 为使该系统稳定,  $K$  的取值范围是什么?



4.32 如题图 4.32 所示的电路, 设运放为理想的, 求: (1) 系统函数  $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ ;

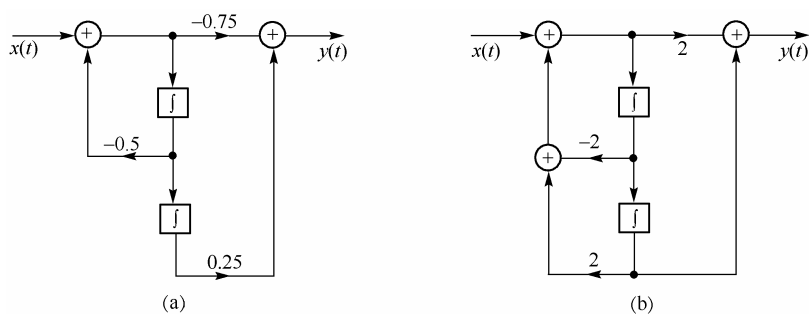
(2) 使系统稳定的  $K$  值范围。



4.33 用加法器、乘法器和积分器模拟下述系统，画出它们的信号流图。

$$(1) \quad 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2x(t)$$
$$(2) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$
$$(3) \quad \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$
$$(4) \quad H(s) = \frac{s^2 + 5s + 8}{s^3 + 7s^2 + 10s + 12}$$

4.34 写出题图 4.34 所示框图所描述系统的微分方程, 并求其单位冲激响应。



题图 4.34

4.35 由下列信号的拉普拉斯变换  $F(s)$ ，求该信号的傅里叶变换  $F(\omega)$ 。

(1)  $F(s) = \frac{1}{s}$

(2)  $F(s) = \frac{2}{s^2 + 1}$

(3)  $F(s) = \frac{s^2 + 9}{s(s^2 + 4s + 3)}$

(4)  $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$

(5)  $F(s) = \frac{s^2 + 9}{s(s^2 + 4)}$

(6)  $F(s) = \frac{s + 3}{(s + 4)(s^2 + 9)}$

# 第 5 章 离散时间信号与系统分析

## 学习要点

本章简要讨论离散时间信号与系统。要求读者：

1. 掌握离散时间信号与离散系统差分方程的特征；
2. 差分方程的时域求解，离散卷积和的计算；
3. 常见离散信号的 $z$ 变换及用 $z$ 变换分析计算差分方程和离散系统，包括系统的稳定性分析和离散系统的模拟；
4. 了解离散信号和系统的频率特性和离散傅里叶变换(DFT)的概念；
5. 了解几种常用的数字滤波器的原理。

## 5.1 离散时间信号

### 5.1.1 离散时间信号的定义

仅对离散时间有定义的信号被称为离散时间信号。一般，离散时间信号仅对等间隔采样的时间( $t = nT$ ,  $T$ 为采样周期,  $n$ 为整数)有定义。

日产量统计报表、股票变化曲线、气温测量曲线、数字电视信号等，都是离散信号的典型实例。一类离散时间信号是物理实现的，另一类离散信号是数学上的。典型的例子有：通过对连续时间信号的等间隔采样得到的样本集合，即  $f(n) = f(t)|_{t=nT}$ ，对周期连续信号用具有谐波频率的复正弦正交函数族进行正交采样后得到的傅里叶级数展开式系数集合  $\{F_n|_{n \in \mathbf{Z}}\}$  和在数值计算中大量遇到的离散信号。在本书中，离散信号与序列有同一含义，可不加区别地使用。

### 5.1.2 典型离散时间信号

#### 1. 单位采样信号

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

它只在  $n = 0$  处取单位值 1，在其余样点上都为 0，如图 5.1 所示。

它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激信号  $\delta(t)$ 。但是它们有本质的区别，尤其要注意， $\delta(n)$  在  $n = 0$  时有确定值 1。

#### 2. 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

的图形如图 5.2 所示。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位阶跃信号  $u(t)$ 。注意， $u(t)$  在  $t = 0$  处发生跳变，其数值一般不予定义，而  $u(n)$  在  $n = 0$  时明确定义为 1。

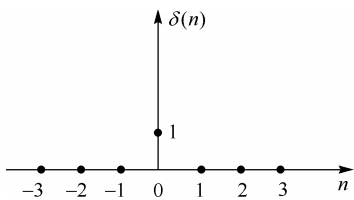


图 5.1 单位采样序列

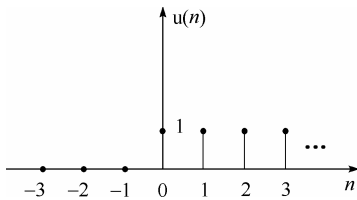


图 5.2 单位阶跃序列

不难看出,  $\delta(n)$  和  $u(n)$  有如下关系:

$$\begin{cases} \delta(n) = u(n) - u(n-1) \\ u(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(n-m) \end{cases} \quad (5.3)$$

即单位阶跃序列是单位采样序列的累计和, 而单位采样序列是单位阶跃序列的后向差分。

### 3. 因果指数序列

$$f(n) = a^n u(n) \quad (5.4)$$

当  $|a| > 1$  时, 该序列按指数增长; 当  $|a| < 1$  时, 它按指数衰减; 当  $|a| = 1$  时, 它退化为单位阶跃序列  $u(n)$ ; 当  $a < 0$  时, 序列值正负摆动。图 5.3 示出了对不同的  $a$  而言的因果指数序列。

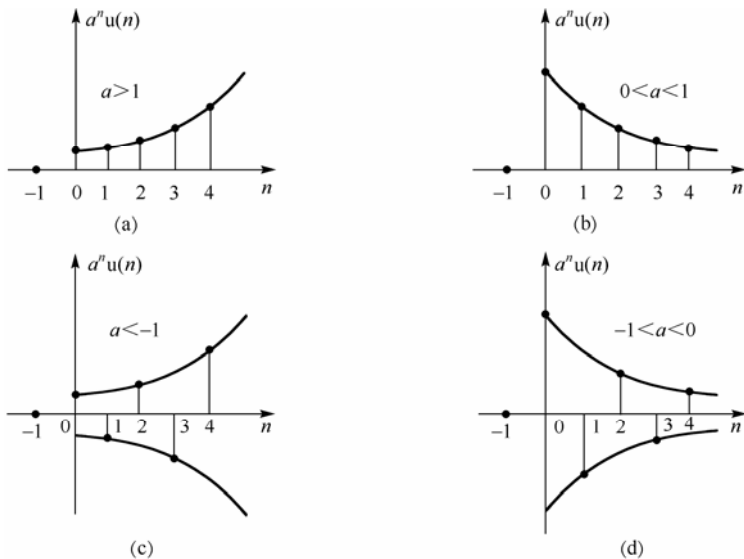


图 5.3 因果指数序列

### 4. 因果矩形窗序列

$$\begin{aligned} G_N(n) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ 为其他值} \end{cases} \\ &= u(n) - u(n-N) = u(n)u(N-1-n) \end{aligned} \quad (5.5)$$

它是一个有限长序列，它的图形如图5.4所示。而且，任何序列乘以它后都一定是一个因果有限长序列。

5. 正弦序列

$$f(n) = \sin(\omega_0 n) \tag{5.6}$$

其在  $\omega_0 = 0.1\pi$  时的图形如图5.5所示。注意，只有当数字频率  $\omega_0/2\pi$  为有理数时，正弦序列才是周期序列。

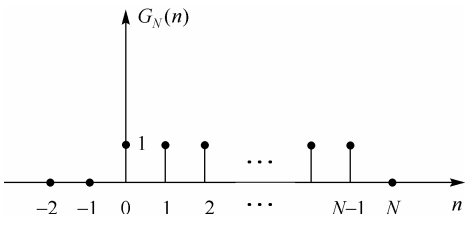


图 5.4 因果矩形窗序列

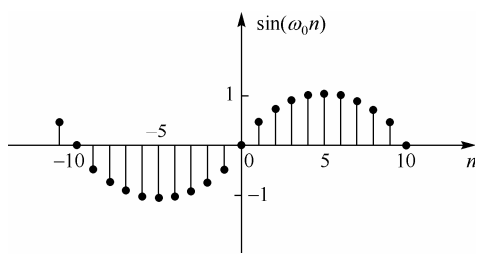


图 5.5 正弦序列

5.1.3 离散时间信号的典型运算

1. 相加

两个序列相加，是指两序列同序号的序列值逐项对应相加，其和为一个新序列。例如，设  $f_1(n) = nu(n)$ ， $f_2(n) = u(n)$ ，则  $f(n) = f_1(n) + f_2(n) = nu(n) + u(n) = (n+1)u(n)$ 。

2. 相乘

两个序列相乘，是指两序列同序号的序列值逐项对应相乘，其和为一个新序列。例如，设  $f_1(n) = n$ ， $f_2(n) = u(n)$ ，则  $f(n) = f_1(n)f_2(n) = nu(n)$ 。

特殊地，当其中一个序列为一个与序号无关的常数时，相乘退化为序列的标量乘。

3. 移位

序列  $f(n)$  的移位(移序)，是指该序列沿  $n$  轴逐项依次移位，使其波形整体平移。其中，移位值  $m$  一定为整数，如图 5.6 所示。当  $m > 0$  时，移位后的序列  $f(n-m)$  比  $f(n)$  延迟  $m$  位，即  $f(n)$  的波形右移  $m$  位；否则，左移  $-m$  位。例如，

$$G_N(n-m) = \begin{cases} 1 & m \leq n \leq m+N-1 \\ 0 & n \text{ 为其他值} \end{cases}$$

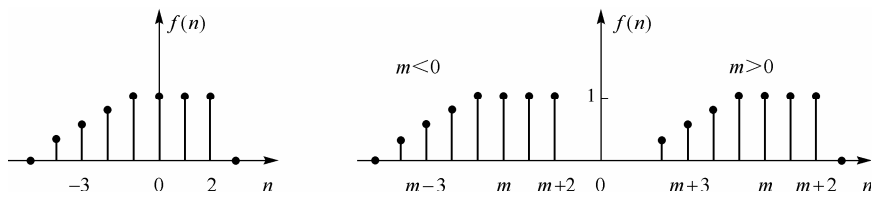


图 5.6 序列移位

## 5.2 离散时间系统

### 5.2.1 差分方程

离散时间系统,简称离散系统,是输入信号和输出信号都是离散时间信号的系统。数字计算机就是一个典型的离散系统,数据控制系统和数字通信系统的核心部件也都是离散系统。由于离散系统能充分发挥数字器件和计算机的作用,所以离散系统的应用越来越广泛。

连续系统用微分方程描述,离散系统则以差分方程描述。下面以具体例子说明用差分方程描述离散系统的方法。

#### 1. 用差分方程近似微分方程

**例 5.1** 求近似描述图 5.7 所示 RC 低通网络的离散系统。

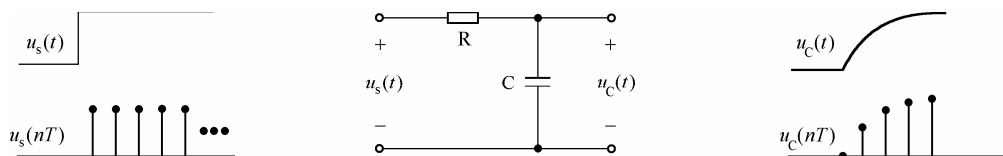


图 5.7 RC 低通网络的离散近似

**解** 描述此系统的数学模型是一阶微分方程:

$$RCu'_C(t) + u_C(t) = u_s(t) \quad (5.7)$$

若用等间隔  $T$  对  $u_C(t)$  采样,其在  $t = nT$  各点的采样值为  $u_C(nT)$ 。由微分的定义可知,当  $T$  足够小时,微分可用前向差分近似,即  $u'_C(nT) \approx \frac{u_C((n+1)T) - u_C(nT)}{T}$ 。对输入  $u_s(t)$  也进行等间隔采样,得其在  $t = nT$  各点的采样值  $u_s(nT)$ , 这样式 (5.7) 可以近似地写为

$$RC \frac{u_C((n+1)T) - u_C(nT)}{T} + u_C(nT) = u_s(nT)$$

为简便起见,令  $T=1$  (此时,时间以采样间隔计), 经整理后有

$$u_C(n+1) \approx au_C(n) + bu_s(n) \quad a = 1 - \frac{1}{RC}, \quad b = \frac{1}{RC} \quad (5.8)$$

这是一个一阶常系数线性差分方程。

例 5.1 表明,当采样间隔足够小时,任何微分方程都可以用其相应的差分方程近似。事实上这是数值计算理论的基础,数字计算机就用此原理求解微分方程。

#### 2. 用差分方程描述的离散系统

有些系统本身就是一个可以用差分方程描述的离散系统,如例 5.2 所示。

**例 5.2** 求如图 5.8 所示电阻解码网络的离散系统。

**解** 对于任一节点  $n-1$ , 利用 KCL 有

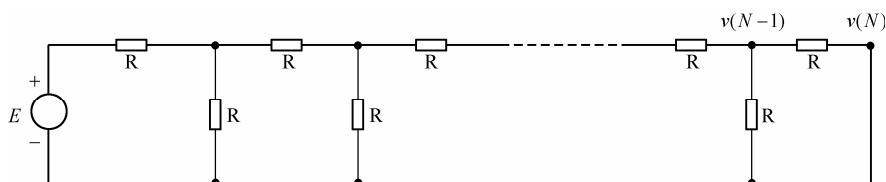


图 5.8 电阻解码网络

$$\frac{v(n-1)}{R} + \frac{v(n-1) - v(n)}{R} = \frac{v(n-2) - v(n-1)}{R}$$

经整理后有

$$v(n) - 3v(n-1) + v(n-2) = 0 \quad (5.9)$$

这是一个二阶常系数差分方程，借助两个边界条件： $v(N) = 0$  和  $v(0) = E$ ，可以求取节点  $n$  的电压  $v(n)$ 。

一般，若一个离散系统的数学模型是一个常系数线性差分方程，则它是一个线性时不变离散系统。本书仅研究这类系统。

差分方程的阶数等于未知序列（响应序列）的最高序号与最低序号之差。输入为  $f(n)$ 、输出为  $y(n)$  的  $N$  阶线性时不变离散系统可一般地用下述  $N$  阶常系数线性差分方程描述：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{k=0}^M b_k f(n-k) \quad (5.10)$$

其中规定  $a_0 = 1$ ，使得

$$y(n) = - \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i y(n-i)}_{\text{过去输出的加权和}} + \underbrace{\sum_{k=1}^M b_k f(n-k)}_{\text{现在和过去输入的加权和}}$$

这称为自回归动平均（Auto-Recursive and Moving Average, ARMA）序列。它的最重要性质是线性、时不变性和因果性。

### 3. 离散时间系统的线性、时不变性和因果性

若设离散系统的输入-输出关系为  $f(n) \rightarrow y(n)$ ，则线性指的是同时满足齐次性和可加性，即对于任意常数  $a_1$  和  $a_2$  及输入  $f_1(n)$  和  $f_2(n)$ ，有

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \rightarrow a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

其中，齐次性指的是对于任意常数  $a$  及输入  $f(n)$ ，有

$$af(n) \rightarrow ay(n)$$

可加性指的是对于任意输入  $f_1(n)$  和  $f_2(n)$ ，有

$$f_1(n) + f_2(n) \rightarrow y_1(n) + y_2(n)$$

而时不变性指的是对于任意整数  $m$  及输入  $f(n)$ ，有

$$f(n-m) \rightarrow y(n-m)$$



离散系统的时不变性又称为位移不变性。因果性指的是系统的输出与将来的输入无关。容易验证, 式(5.10)描述的  $N$  阶离散系统是一个因果的 LTI 离散系统。

## 5.2.2 LTI离散系统的响应

LTI 离散系统的响应也包括零输入响应和零状态响应两部分。

### 1. 零输入响应的求解

**例 5.3** 求式(5.8)所示离散系统在初始电压为  $u_C(0)$  时的零输入解。

**解** 当输入为零时, 该系统可改写为

$$u_C(n+1) \approx au_C(n)$$

由此递归公式, 有

$$u_{C,zi}(n) = a^n u_C(0) \quad n \geq 0 \quad (5.11)$$

由例 5.3 可见, 一阶系统的零输入响应具有因果指数序列形式, 其指数的底是系统的特征根, 即系统特征方程  $\lambda - a = 0$  的根。

**例 5.4** 求式(5.9)所示离散系统的解。

**解** 该系统的特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

其特征根为

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{和} \quad \lambda_2 = \lambda^{-1}$$

则系统零输入响应可写为

$$v(n) = v_{zi}(n) = K_1 \lambda_1^n + K_2 \lambda_2^n = K_1 \lambda^n + K_2 \lambda^{-n}$$

代入边界条件  $v(n) = 0$  和  $v(0) = E$  后, 有

$$v(n) = \frac{1 - \lambda^{2(N-n)}}{1 - \lambda^{2N}} \lambda^n E \quad 0 \leq n \leq N$$

### 2. 零状态响应的求解

#### (1) 离散时间信号的分解

第 2 章曾指出任何连续信号可以分解为冲激信号的线性组合, 即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

类似地, 离散信号也可以表示为单位采样序列的线性组合。因为

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

则

$$f(k) \delta(n-k) = \begin{cases} f(n) & n=k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

所以, 任何序列  $f(n)$  都可写为

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\delta(n-k) \quad (5.12)$$

## (2) 系统零状态响应的卷积和表示

LTI 离散系统对单位采样序列  $\delta(n)$  的零状态响应  $h(n)$  是系统的单位采样响应 (也称为冲激响应), 即  $\delta(n) \rightarrow h(n)$ , 则由系统零状态响应的线性时不变性和式 (5.12) 可知, 系统对输入  $f(n)$  的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)h(n-k) \quad f(n) * h(n) \quad (5.13)$$

即系统零状态响应等于输入序列  $f(n)$  与系统单位采样响应  $h(n)$  的离散卷积 (也称为卷积和)。这样, 系统零状态响应的计算问题就转化为系统单位采样响应的计算与卷积和的计算问题。

## (3) 系统单位采样响应的计算

首先, 让我们来看如下的例子。

**例 5.5** 求式 (5.8) 所示离散系统的单位采样响应。

**解** 当该系统处于零状态, 即  $u_c(-1) = 0$ 、输入为  $\delta(n)$  时, 该系统可改写为

$$u_c(n+1) \approx au_c(n) + b\delta(n) \quad (5.14)$$

使用递推法, 有

$$\begin{aligned} u_c(0) &\approx au_c(-1) + b\delta(-1) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \\ u_c(1) &= au_c(0) + b\delta(0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b \\ u_c(2) &= au_c(1) + b\delta(1) = a \cdot b + b \cdot 0 = ab \\ &\vdots \\ u_c(n) &= au_c(n-1) + b\delta(n-1) = a \cdot a^{n-2}b + b \cdot 0 = a^{n-1}b \end{aligned}$$

例 5.5 说明了用递推法计算一阶系统的单位采样响应的过程。但对于高阶系统, 用此方法不易得到封闭式的解。从使用角度出发, 用后面要介绍的  $z$  变换法很容易求解系统的单位采样响应、零状态响应 (包括两序列的卷积和) 和全响应。

## (4) 系统零状态响应的计算——卷积和的计算

系统零状态响应的计算是卷积和计算的特例, 这时进行卷积和的两个序列分别为系统输入序列  $f(n)$  与系统单位采样响应  $h(n)$ 。

与卷积计算类似, 卷积和计算也有解析法、图解法和  $z$  变换法。

### ① 解析法

解析法最适用于两个因果序列的卷积和计算。因为两个因果序列的卷积和仍为因果序列, 并且求和运算的上、下限分别为 0 和  $n$ 。所以, 有

$$f_1(n)u(n) * f_2(n)u(n) = u(n) \sum_{m=0}^n f_1(m)f_2(n-m) \quad (5.15)$$

**例 5.6** 计算  $\lambda_1^n u(n) * \lambda_2^n u(n)$ 。

**解** 由式(5.15)可知

$$\begin{aligned}\lambda_1^n u(n) * \lambda_2^n u(n) &= u(n) \sum_{m=0}^n \lambda_1^m \lambda_2^{n-m} \\ &= \lambda_2^n u(n) \sum_{m=0}^n (\lambda_1 \lambda_2^{-1})^m \\ &= \begin{cases} \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(n) & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (n+1) \lambda_2^n u(n) & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}\end{aligned}$$

其中,利用了等比级数求和公式。

### ② 图解法

图解法主要包括翻转、平移和乘加等运算,它尤其适合于至少有一个序列为有限长序列的卷积和计算。

**例 5.7** 计算  $x(n) * h(n)$ , 其中,  $x(n) = G_N(n)$  和  $h(n) = a^n u(n)$ 。

**解** 步骤 1: 把横轴改为  $m$ , 如图 5.9(a) 所示;

步骤 2: 翻转  $h(m)$  的波形, 得  $h(-m)$ , 如图 5.9(b) 所示;

步骤 3: 向右平移  $n$ , 得图形  $h(n-m)$ , 如图 5.9(c) 所示;

步骤 4: 把波形  $x(m)$  和  $h(n-m)$  的序列值对应相乘后累加, 得  $x(n) * h(n)$  的序列值;

步骤 5: 对不同的  $n$ , 进行步骤 3 和步骤 4 过程, 就得到所需卷积和结果, 如图 5.9(d) 所示。

其中, 图 5.9(c) 示出了  $n = -4$  和  $n = 4$  两例时的  $h(n-m)$ 。

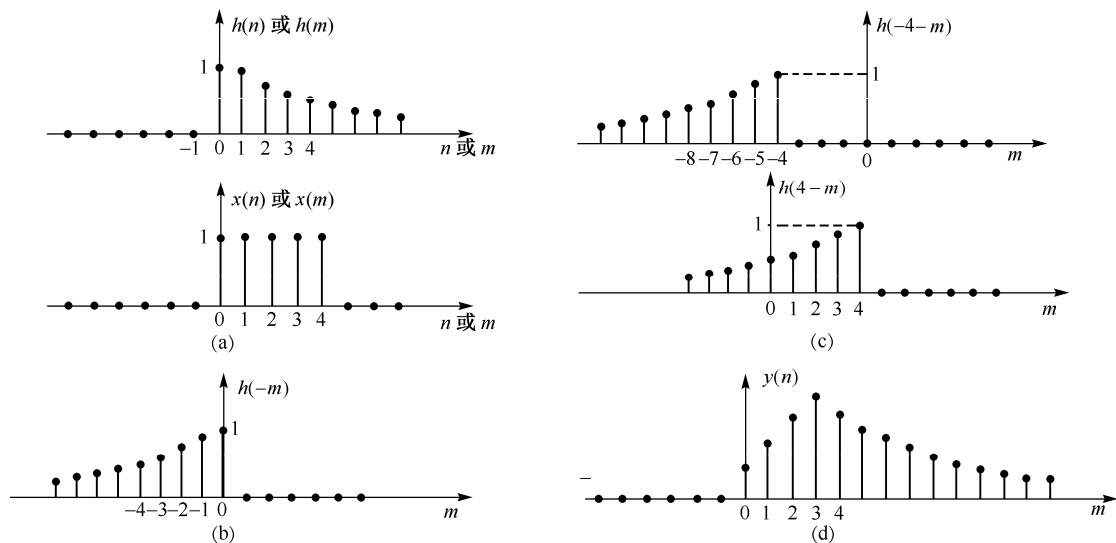


图 5.9 离散卷积和的图解法

### ③ 对位乘法

当两个序列都是有限长序列时, 可使用“对位乘法”计算卷积和。此方法实际上是用对位排列运算巧妙地取代翻转平移运算。该方法首先把两序列的样本值右端对齐地排列, 然

后把逐个样本值对应相乘但不要进位，最后把同一列上的乘积值对位求和，就得到所需卷积和。下面用一简例说明。

**例 5.8** 计算  $x_1(n) * x_2(n)$ ，其中  $x_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2) + \delta(n-3)$ ， $x_2(n) = 3\delta(n) + \delta(n-1) + 5\delta(n-2)$ 。

**解** 使用对位乘法，有

$x_1(n):$			2	1	4	1	
$x_2(n):$					3	1	5
				10	5	20	5
			2	1	4	1	
		6	3	12	3		
$x_1(n) * x_2(n):$	6	5	23	12	21	5	

即

$$x_1(n) * x_2(n) = 6\delta(n) + 5\delta(n-1) + 23\delta(n-2) + 12\delta(n-3) + 21\delta(n-4) + 5\delta(n-5)$$

需要指出的是，对位乘法实际上就是  $z$  变换法应用于有限长信号的特例。 $z$  变换法将在后面介绍。

### 5.3 $z$ 变换

#### 5.3.1 $z$ 变换的定义

为便于理解，我们从双边拉普拉斯变换推导  $z$  变换。

采样信号及其双边拉普拉斯变换为

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT) \Leftrightarrow F_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{-nsT}$$

使用复变量替换

$$z = e^{-sT}$$

并用  $f(n)$  替换  $f(nT)$  后，有  $z$  变换

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n} \tag{5.16}$$

根据复变函数理论，对应的  $z$  逆变换为

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z)z^{n-1}dz \tag{5.17}$$

通常，我们记  $z$  变换对为

$$f(n) \Leftrightarrow F(z) \tag{5.18}$$

从上述讨论可以看出，采样信号  $f_s(t)$  的双边拉普拉斯变换与它对应的样本序列的双边  $z$  变换之间的关系。

使  $z$  变换式 (5.16) 收敛的  $z$  值范围是  $F(z)$  的收敛域, 也就是使  $F(z)$  绝对可和的  $z$  值范围:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)z^{-n}| < +\infty \tag{5.19}$$

式 (5.16) 定义了双边  $z$  变换。当它的求和下限取为 0 时, 我们有本书重点讨论的单边  $z$  变换

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n} \tag{5.20}$$

5.3.2  $z$  变换的收敛域

容易证明, 双边无限长序列的双边  $z$  变换  $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n}$  的收敛域为圆环:

$R_{f-} < |z| < R_{f+}$ ; 右边序列的  $z$  变换  $F(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} f(n)z^{-n}$  的收敛域为一圆的外部 (除了无穷远点  $z = \infty$  之外):  $R_{f-} < |z| < \infty$ , 当它是因果序列时, 收敛域还应包括无穷远点:  $R_{f-} < |z|$ ; 而

左边序列的  $z$  变换  $F(z) = \sum_{n=-\infty}^m f(n)z^{-n}$  的收敛域为一圆的内部 (除了原点  $z = 0$  之外):

$0 < |z| < R_{f+}$ , 当它是反因果序列时,  $F(z) = \sum_{n=-\infty}^0 f(n)z^{-n}$  的收敛域还应包括原点:  $|z| < R_{f+}$ ;

有限长序列的  $z$  变换  $F(z) = \sum_{n=-m_1}^{m_2} f(n)z^{-n}$  的收敛域至少为除原点和无穷远点之外的全平面:

$0 < |z| < \infty$ , 当它是因果序列时,  $F(z) = \sum_{n=0}^{m_2} f(n)z^{-n}$  的收敛域还应包括无穷远点:  $0 < |z|$ ,

而当它是反因果序列时,  $F(z) = \sum_{n=-m_1}^0 f(n)z^{-n}$  的收敛域还应包括原点:  $|z| < \infty$ 。

表 5.1 综述了不同类序列的收敛域。

表 5.1 序列类型与  $z$  变换收敛域的关系

有限长序列			右 边		左 边		双边无限长
双边	因果	反因果	非因果	因果	非反因果	反因果	
$0 <  z  < \infty$	$0 <  z $	$ z  < \infty$	$R_{f-} <  z  < \infty$	$R_{f-} <  z $	$0 <  z  < R_{f+}$	$ z  < R_{f+}$	$R_{f-} <  z  < R_{f+}$

值得注意的是, 同一个  $z$  变换在具有不同的收敛域时, 会对应不同的序列。从例 5.13 可见, 同一个  $\frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}$  在收敛于大圆外区域  $a < b < |z|$  时对应因果序列  $(a^n + b^n)u(n)$ , 在收敛于小圆内区域  $|z| < a < b$  时对应反因果序列  $-(a^n + b^n)u(-n-1)$ , 而在收敛于圆环内区域  $a < |z| < b$  时对应双边序列  $a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ 。因此, 在计算一个序列的  $z$  变换时, 必须同时给出其收敛域。

### 5.3.3 典型序列的z变换

#### 1. 单位采样序列 $\delta(n)$

把  $\delta(n)$  代入式 (5.16), 有

$$\delta(n) \Leftrightarrow 1 \quad (5.21)$$

#### 2. 阶跃序列 $u(n)$

把  $u(n)$  代入式 (5.16), 有

$$u(n) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1 \quad (5.22)$$

其中, 使用了公比小于 1 的无穷等比级数的求和公式。

#### 3. 指数序列 $a^n u(n)$

由  $z$  变换的定义, 有

$$a^n u(n) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad (5.23)$$

特殊地, 当  $a = e^{j\omega_0}$  时, 有

$$e^{jn\omega_0} u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}} \quad |z| > 1 \quad (5.24)$$

这使得对于正弦序列, 有

$$\sin(n\omega_0) u(n) \Leftrightarrow \frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}} \quad (5.25)$$

和

$$\cos(n\omega_0) u(n) \Leftrightarrow \frac{1-z^{-1} \cos(\omega_0)}{1-2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}} \quad (5.26)$$

### 5.3.4 z变换的性质

#### 1. 线性性质

$z$  变换是一个线性变换, 即

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \Leftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \quad (5.27)$$

其实, 在从式 (5.24) 得出式 (5.25) 和式 (5.26) 时, 已经利用了  $z$  变换的线性性质。

#### 2. 位移特性(延迟特性)

##### (1) 因果移序性质

对双边序列  $f(n)$ , 令  $f_+(n) = f(n)u(n)$  是它的因果分量,  $f_+(n-m)$  和  $f_+(n+m)$  分别是  $f_+(n)$  右移  $m$  位和左移  $m$  位后得到的序列, 则

$$f(n-m)u(n) = f_+(n-m) + \sum_{k=1}^m f(-k)\delta(n-(m-k)) \quad (5.28)$$

和

$$f(n+m)u(n) = f_+(n+m) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\delta(n+(m-k)) \quad (5.29)$$

特殊地,

$$\begin{aligned} f(n-1)u(n) &= f_+(n-1) + f(-1)\delta(n) \\ f(n-2)u(n) &= f_+(n-2) + f(-1)\delta(n-1) + f(-2)\delta(n) \end{aligned} \quad (5.30)$$

和

$$\begin{aligned} f(n+1)u(n) &= f_+(n+1) - f(0)\delta(n+1) \\ f(n+2)u(n) &= f_+(n+2) - f(0)\delta(n+2) - f(1)\delta(n+1) \end{aligned} \quad (5.31)$$

因果移序性质表明了序列因果分量移序后的序列与原序列移序后的因果分量之间的差异。

对式(5.28)~式(5.31)取单边 $z$ 变换, 利用 $f_+(n-m) \Leftrightarrow z^{-m}F(z)$ ,  $f_+(n+m) \Leftrightarrow z^mF(z)$ ,  $\delta(n-(m-k)) \Leftrightarrow z^{-(m-k)}$ 和 $\delta(n+(m-k)) \Leftrightarrow z^{m-k}$ , 有

$$f(n-m)u(n) \Leftrightarrow z^{-m}F(z) + \sum_{k=1}^m f(-k)z^{-(m-k)} \quad (5.32)$$

和

$$f(n+m)u(n) \Leftrightarrow z^mF(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{m-k}$$

特殊地,

$$\begin{aligned} f(n-1)u(n) &\Leftrightarrow z^{-1}F(z) + f(-1) \\ f(n-2)u(n) &\Leftrightarrow z^{-2}F(z) + z^{-1}f(-1) + f(-2) \end{aligned} \quad (5.33)$$

和

$$\begin{aligned} f(n+1)u(n) &\Leftrightarrow zF(z) - zf(0) \\ f(n+2)u(n) &\Leftrightarrow z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1) \end{aligned} \quad (5.34)$$

对于因果序列 $f(n)$ , 当 $1 \leq k \leq m$ 时,  $f(-k) = 0$ , 使得 $f(n)$ 右移 $m$ 位后, 有单边 $z$ 变换

$$f(n-m)u(n) \Leftrightarrow z^{-m}F(z) \quad (5.35)$$

显然, 对于双边 $z$ 变换, 若 $f(n) \Leftrightarrow F(z)$ , 则

$$f(n-m) \Leftrightarrow z^{-m}F(z) \quad m \text{ 为任意整数}$$

因果移序性质的时域表示式(5.28)和 $z$ 域表示式(5.32)分别导致了LTI离散系统分析的时域法和 $z$ 域法的产生。

**例 5.9** 求输入为 $u(n)$ 的一阶LTI离散系统 $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$ 在初始条件 $y(-1) = -1$ 下的系统响应。

**解** 对描述该系统的一阶差分方程取单边 $z$ 变换后, 有

$$Y(z) - 0.9[z^{-1}Y(z) - 1] = \frac{0.05}{1-z^{-1}}$$

使得

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

其中

$$\begin{cases} Y_{zi}(z) = \frac{0.9}{1-0.9z^{-1}} \\ Y_{zs}(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}} \cdot \frac{0.05}{1-z^{-1}} = \frac{-0.45}{1-0.9z^{-1}} + \frac{0.5}{1-z^{-1}} \end{cases}$$

于是, 由式(5.23)可知

$$\text{系统的全响应 } y(n) = \text{零输入响应 } y_{zi}(n) + \text{零状态响应 } y_{zs}(n)$$

其中, 系统的零输入响应为

$$y_{zi}(n) = 0.9^{n+1}u(n)$$

系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = 0.5(1 - 0.9^{n+1})u(n)$$

系统的全响应为

$$y(n) = 0.5(1 - 0.9^{n+1})u(n) - 0.9^{n+1}u(n)$$

### 3. z域尺度变换(序列指数加权)

$$a^n f(n) \Leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right) \quad (5.36)$$

证明: 
$$a^n f(n) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a^n f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

这表明, 时域指数加权对应于 z 域尺度变换。

该性质可用于不稳定离散系统的稳定化处理, 即通过把单位圆外的极点径向地移向单位圆内, 使不稳定的离散系统变成稳定系统。

等价地, 
$$a^{-n} f(n) \Leftrightarrow F(az) \quad (5.37)$$

特殊地, 
$$(-1)^n f(n) \Leftrightarrow F(-z) \quad (5.38)$$

**例 5.10** 求  $\beta^n \cos(n\omega_0)u(n)$  的 z 变换。

**解** 由 z 域尺度变换和式(5.26), 有

$$\beta^n \cos(n\omega_0)u(n) \Leftrightarrow \frac{1 - \beta z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2\beta z^{-1} \cos(\omega_0) + \beta^2 z^{-2}} \quad (5.39)$$

### 4. 卷积和定理

$$f_1(n) * f_2(n) \Leftrightarrow F_1(z)F_2(z) \quad (5.40)$$

式(5.40)表明, 时域卷积和对应于 z 域相乘, 这是用变换法计算卷积和的基础。特殊地, 系统零状态响应的 z 变换等于输入序列的 z 变换乘以系统单位采样响应的 z 变换, 即

$$Y_{zs}(z) = F(z)H(z) \quad (5.41)$$

这是离散系统 z 域分析的基础。

**证明:** 由卷积和的定义和双边 z 变换的定义, 有

$$\begin{aligned} f_1(n) * f_2(n) &\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1(m) f_2(n-m) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_2(n-m) z^{-(n-m)} \right] f_1(m) z^{-m} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_2(k) z^{-k} \right] f_1(m) z^{-m} = F_1(z)F_2(z) \end{aligned}$$



当  $f_1(n)$  和  $f_2(n)$  都是因果序列时, 式(5.40)中的  $F_1(z)$  和  $F_2(z)$  都用单边  $z$  变换计算。

**例 5.11** 计算卷积和  $\lambda_1^n u(n) * \lambda_2^n u(n)$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )。

**解** 由于  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 利用卷积和定理, 有

$$\lambda_1^n u(n) \otimes \lambda_2^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\lambda_1 z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-\lambda_2 z^{-1}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 z^{-1}} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2 z^{-1}} \right)$$

于是有

$$\lambda_1^n u(n) * \lambda_2^n u(n) = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} u(n)$$

**例 5.12** 计算  $na^n u(n)$  的  $z$  变换。

**解** 由例 5.6 可知

$$(n+1)a^n u(n) = a^n u(n) * a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2} \quad (5.42)$$

于是, 利用线性性质和卷积和定理, 有

$$na^n u(n) = a^n u(n) * a^n u(n) - a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2} - \frac{1}{1-az^{-1}}$$

即

$$na^n u(n) \Leftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad (5.43)$$

## 5. 时域翻转性质

$$f(-n) \Leftrightarrow F(z^{-1}) \quad (5.44)$$

**证明:** 由  $z$  变换的定义, 有

$$f(-n) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n)z^{-n} \stackrel{\text{用 } n \text{ 取代 } -n}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^n = F(z^{-1})$$

时域翻转性质可用于把反因果序列的  $z$  变换与对应的因果序列的  $z$  变换联系起来, 从而利用已知的因果序列的  $z$  变换公式求解反因果序列的  $z$  变换。

**例 5.13** 计算  $(a^n + b^n)u(n)$ ,  $-(a^n + b^n)u(-n-1)$  和  $a^n u(n) - b^n u(-n-1)$  的  $z$  变换, 并确定其收敛域, 其中  $b > a > 0$ 。

**解** 由式(5.23)可知

$$a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

因此

$$b^{-n} u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}} \quad |z| > b^{-1}$$

使得

$$b^{-n} u(n-1) = b^{-1} b^{-(n-1)} u(n-1) \Leftrightarrow \frac{b^{-1} z^{-1}}{1-b^{-1} z^{-1}} \quad |z| > b^{-1}$$

于是, 由时域翻转性质可知

$$b^n u(-n-1) \Leftrightarrow \frac{b^{-1} z}{1-b^{-1} z} = \frac{z}{b-z} \quad |z| < b$$

使得 
$$(a^n + b^n)u(n) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \quad a < b < |z|$$

$$-(a^n + b^n)u(-n-1) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \quad |z| < a < b$$

和 
$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \Leftrightarrow \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \quad a < |z| < b$$

$z$  变换还有一些性质, 这里不一一详细叙述, 现把常用性质列于表 5.2 中, 供查阅和使用。

表 5.2  $z$  变换的常用性质

序 号	性 质 名 称	时域与 $z$ 域的对应关系
1	线性性质	$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \Leftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$
2	延迟特性	$f(n-m)u(n) \Leftrightarrow z^{-m} \left[ F(z) + \sum_{k=1}^m f(-k)z^k \right]$ $f(n-m) \Leftrightarrow z^{-m} F(z)$
3	卷积和定理	$f_1(n) \otimes f_2(n) \Leftrightarrow F_1(z)F_2(z)$
4	复卷积定理	$f_1(n)f_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint F_1(v)F_2\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$
5	$z$ 域尺度变换	$a^n f(n) \Leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$
6	序列求和	$\sum_{k=0}^n f(k) \Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} F(z)$
7	$z$ 域微分	$n^m f(n) \Leftrightarrow \left(-z \frac{d}{dz}\right)^m F(z)$
8	初值定理	$f(0_+) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
9	终值定理	$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$

5.4  $z$  逆变换

从  $z$  变换的定义出发, 使用复变函数理论, 可以证明  $z$  逆变换由以下围线积分给出:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \tag{5.45}$$

式中,  $C$  是包围  $F(z)z^{n-1}$  所有极点的逆时针闭合积分路线, 通常选择  $z$  平面收敛域内以原点为中心的圆, 如图 5.10 所示。

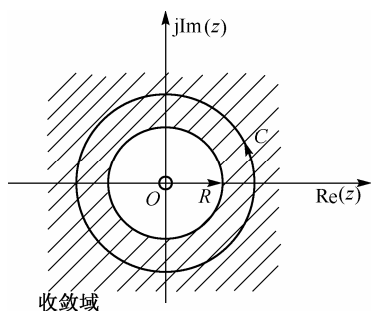


图 5.10 围线积分的积分路线选取

求  $z$  逆变换时, 一般并不进行复杂的围线积分, 而是使用长除法、留数法或部分分式展开法, 这里仅介绍常用的长除法和部分分式展开法。

### 5.4.1 长除法

由  $z$  变换的定义式易知, 序列  $f(n)$  实际上是其  $z$  变换函数  $F(z)$  关于  $z^{-1}$  的幂级数展开式系数, 因此把分式函数  $F(z)$  的分子、分母多项式都按  $z$  的降幂次排列后, 进行长除, 就可以得到所需序列  $f(n)$ 。

**例 5.14** 计算  $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$  的  $z$  逆变换。

**解** 进行如下长除运算:

$$\begin{array}{r}
 z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots \\
 z^2 - 2z + 1 \overline{) z} \\
 \underline{z - 2 + z^{-1}} \\
 2 - 4z^{-1} + 2z^{-2} \\
 \underline{3z^{-1} - 2z^{-2}} \\
 3z^{-1} - 6z^{-2} + 3z^{-3} \\
 \underline{4z^{-2} - 3z^{-3}} \\
 \vdots
 \end{array}$$

即  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$ , 因此  $f(n) = nu(n)$ 。

显然, 长除法虽然简单, 但只适合于分母多项式为低阶的情况。

### 5.4.2 部分分式展开法

当序列  $f(n)$  的  $z$  变换  $F(z)$  为  $z$  的有理函数时, 即

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}} \\
 &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

式中,  $\{p_k | k=1, 2, \cdots, N\}$  是  $F(z)$  的极点集合;  $a_0 = 1$ 。因为很易计算关于  $z^{-1}$  的多项式的  $z$  逆变换, 因此为不失一般性, 我们限定  $F(z)$  为关于  $z^{-1}$  的真分式, 即  $M < N$ 。

与拉普拉斯逆变换中的部分分式分解一样, 可把  $F(z)$  进行部分分式分解。具体地, 可分以下两种情况。

#### 1. 单阶极点情况

此时, 所有极点两两不等, 有  $F(z)$  的部分分式展开及对应的序列  $f(n)$  :

$$F(z) = \sum_{k=1}^N \frac{K_k}{1 - p_k z^{-1}} \Leftrightarrow f(n) = u(n) \sum_{k=1}^N K_k p_k^n \quad (5.47)$$

式中,

$$K_k = \left[ (1 - p_k z^{-1}) F(z) \right] \Big|_{z^{-1}=p_k^{-1}} = \left[ (z - p_k) \frac{F(z)}{z} \right] \Big|_{z=p_k} \quad (5.48)$$

**例 5.15** 计算  $F(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 3z + 2}$  的  $z$  逆变换。

**解** 分解  $F(z)$  为  $F(z) = 1 - z^{-1}F_1(z)$ , 其中,

$$F_1(z) = \frac{2 + z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})} = \frac{2 - 1}{1 + z^{-1}} + \frac{2 - 2^{-1}}{1 + 2z^{-1}} \Leftrightarrow [3(-2)^n - (-1)^n] u(n)$$

使得

$$f(n) = \delta(n) - [3(-2)^{n-1} - (-1)^{n-1}] u(n-1)$$

也可以像求拉普拉斯逆变换那样, 对  $F(z)/z$  进行如下部分分式展开 (限制  $M \leq N$ ):

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_{M-1} z^{N-M+1} + b_M z^{N-M}}{z(z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N)} = \frac{b_0}{z} + \sum_{k=1}^N \frac{K_k}{z - p_k} \quad (5.49)$$

式中,

$$K_k = \left[ (z - p_k) \frac{F(z)}{z} \right] \Big|_{z=p_k} \quad (5.50)$$

于是有

$$f(n) = b_0 \delta(n) + u(n) \sum_{k=1}^N K_k p_k^n \quad (5.51)$$

现用此方法计算例 5.15, 有

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{z^2 + z + 1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z} + \frac{1-1+1}{z+1} + \frac{4-2+1}{z+2} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{-1}{z+1} + \frac{3}{z+2} \end{aligned}$$

整理并取  $z$  逆变换后, 有

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2} \delta(n) + \left[ -(-1)^n + \frac{3}{2} (-2)^n \right] u(n) \\ &= \left( \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} \right) \delta(n) - [3(-2)^{n-1} - (-1)^{n-1}] u(n-1) \\ &= \delta(n) - [3(-2)^{n-1} - (-1)^{n-1}] u(n-1) \end{aligned}$$

可见得到的结果与上面计算的结果一样。

## 2. 重极点情况

设  $F(z)$  在  $z = p_1$  处有  $m$  重极点, 如拉普拉斯逆变换那样,  $F(z)$  的部分分式展开式中关于重极点  $z = p_1$  的分项, 然后计算相应的  $z$  逆变换。下面用一个简单例说明之。

**例 5.16** 计算  $F(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2}$  的  $z$  逆变换。

**解** 分解  $F(z)$  得

$$F(z) = \frac{A_{11}}{(z-1)^2} + \frac{A_{12}}{z-1} + \frac{A_2}{z-2}$$

其中,

$$A_2 = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$$

由于

$$(z-1)^2 F(z) = A_{11} + A_{12}(z-1) + \frac{A_2(z-1)^2}{z-2} = \frac{z}{z-2}$$

所以

$$A_{11} = \frac{1}{1-2} = -1 \quad \text{和} \quad A_{12} = \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-2} \right) \Big|_{z=1} = -\frac{2}{(1-2)^2} = -2$$

使得

$$f(n) = (2 \cdot 2^{n-1} - 2 - (n-1))u(n-1) = (2^n - (n+1))u(n-1)$$

其中利用了

$$nu(n) \Leftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{(z-1)^2} \Leftrightarrow (n-1)u(n-1)$$

## 5.5 离散系统的 $z$ 域分析

### 5.5.1 用 $z$ 变换计算离散系统的零输入响应、零状态响应和全响应

例 5.9 已清楚地表明, 用  $z$  变换计算离散系统的零输入响应、零状态响应和全响应是十分方便的, 下面再以一例说明。

**例 5.17** 求输入为  $u(n)$  的二阶 LTI 离散系统  $y(n) - 2.5y(n-1) + y(n-2) = f(n)$  在初始条件  $y(-1) = -1$  和  $y(-2) = 1$  下的零输入响应、零状态响应和全响应。

**解** 对描述该系统的二阶差分方程取单边  $z$  变换后, 有

$$Y(z) - 2.5[z^{-1}Y(z) - 1] + [z^{-2}Y(z) - z^{-1} + 1] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

使得  $Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$ , 其中,

$$\begin{cases} Y_{zi}(z) = \frac{z^{-1} - 3.5}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{0.5}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{4}{1 - 2z^{-1}} \\ Y_{zs}(z) = \frac{1}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{8}{1 - 2z^{-1}} - \frac{6}{1 - z^{-1}} \right) \end{cases}$$

于是, 系统的零输入响应为

$$y_{zi}(n) = [0.5^{n+1} - 2^{n+2}]u(n)$$

系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = \frac{1}{3}(0.5^n + 2^{n+3} - 6)u(n)$$

则系统的全响应为

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = \frac{2}{3}(5 \cdot 0.5^n - 2^{n+1} - 3)u(n)$$

### 5.5.2 LTI离散系统的系统函数 $H(z)$

正如连续系统的系统函数  $H(s)$  一样, 离散系统的系统函数  $H(z)$  也是反映系统特征的重要函数。它定义为离散系统单位采样响应  $h(n)$  的  $z$  变换。由于系统零状态响应  $y(n)$  等于输入激励  $f(n)$  与系统单位采样响应  $h(n)$  的卷积和, 使得零状态响应的  $z$  变换等于输入激励的  $z$  变换乘以系统函数, 即

$$y(n) = f(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(z) = F(z)H(z) \quad (5.52)$$

于是有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} \quad (5.53)$$

设描述  $N$  阶 LTI 离散系统的差分方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r f(n-r) \quad (5.54)$$

式中,  $a_0 = 1$ 。当一个物理可实现系统(其单位采样响应一定是因果的)的输入为因果信号时, 系统零状态响应一定也是因果的, 这样对式(5.54)取  $z$  变换, 并利用式(5.35), 有

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = F(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (5.55)$$

式(5.55)表明, 能用常系数线性差分方程描述的 LTI 离散系统的系统函数是一个  $N$  阶有理多项式。使用部分分式展开法, 可计算与式(5.55)给出的系统函数相应的系统单位采样响应。

**例 5.18** 求二阶系统的差分方程  $y(n) + 0.6y(n-1) - 0.16y(n-2) = f(n) + 2f(n-1)$  的系统函数、单位采样响应和在输入  $f(n) = 0.4^n u(n)$  时的零状态响应。

**解** 在零状态条件下, 对描述该系统的二阶差分方程取单边  $z$  变换后, 有

$$Y(z) + 0.6z^{-1}Y(z) - 0.16z^{-2}Y(z) = F(z) + 2z^{-1}F(z)$$

可得系统函数  $H(z)$  为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.16z^{-2}} = \frac{2.2}{1 - 0.2z^{-1}} - \frac{1.2}{1 + 0.8z^{-1}}$$

取  $z$  逆变换后, 可得系统单位采样响应

$$h(n) = [11(0.2)^{n+1} - 1.2(-0.8)^n]u(n)$$

由输入激励的  $z$  变换  $F(z) = \frac{1}{1 - 0.4z^{-1}}$  可得系统零状态响应的  $z$  变换为

$$\begin{aligned}
 Y_{zs}(z) &= \frac{2.2}{(1-0.4z^{-1})(1-0.2z^{-1})} - \frac{1.2}{(1-0.4z^{-1})(1+0.8z^{-1})} \\
 &= \left( \frac{4.4}{1-0.4z^{-1}} - \frac{2.2}{1-0.2z^{-1}} \right) - \left( \frac{0.4}{1-0.4z^{-1}} + \frac{0.8}{1+0.8z^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

取  $z$  逆变换后, 可得系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n) = (4(0.4)^n - 2.2(0.2)^n - 0.8(-0.8)^n)u(n)$$

### 5.5.3 零、极点分布和系统稳定性

#### 1. 极点分布和冲激响应 $h(n)$ 的关系

通常, 离散 IIR 系统由  $M \leq N$  的式 (5.55) 给出, 此时可以令  $b_{M+1} = \dots = b_N = 0$ 。因此, 可以认为离散 IIR 系统的系统函数统一地为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.56)$$

对它的分子、分母多项式分别进行因式分解后, 有

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{i=1}^N (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (5.57)$$

式中,  $z_i$  为系统零点;  $p_i$  为系统极点。显然, 系统特性取决于系统的零、极点分布。

利用部分分式展开法可知, 系统传递函数的每一个极点确定了系统冲激响应的一个本征分量。图 5.11 示出了  $H(z)$  的极点位置与  $h(n)$  的关系。

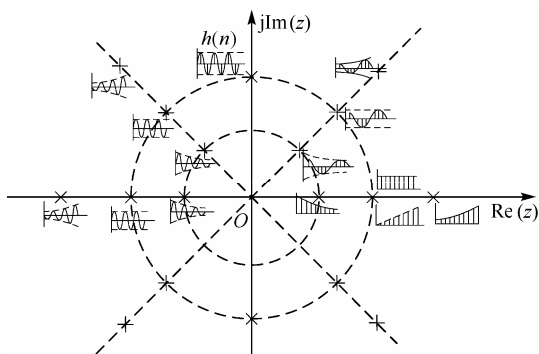


图 5.11  $H(z)$  的极点位置与  $h(n)$  的关系

#### 2. 离散系统稳定性

与连续系统相似, 离散系统的稳定性概念也是建立在 BIBO 意义上的, 即系统稳定的充要条件是系统对任何有界输入都产生有界输出。可以证明, 因果 LTI 离散系统稳定的充要条件是系统单位采样响应绝对可和, 即

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$$

(5.58)

由此判据，不难理解如下结论成立：

- (1) 若  $H(z)$  的所有极点都在单位圆内，即对所有的  $i$ ，有  $|p_i| < 1$ ，则系统稳定；
- (2) 若  $H(z)$  在单位圆上仅有一阶极点，并且其余极点都在单位圆内，则系统临界稳定；
- (3) 若  $H(z)$  在单位圆上有重极点，或在单位圆外有极点，则系统不稳定。

可见，因果系统的稳定性可通过其系统函数的收敛域是否包含单位圆来判断，包含时系统稳定，否则不稳定。

同理，反因果系统的稳定性要求系统函数的极点都位于单位圆外，因此，其收敛域包含单位圆。这意味着反因果系统也可通过其系统函数的收敛域是否包含单位圆来判断，包含时系统稳定，否则不稳定。

同样可证，无因果约束的一般系统的稳定性也可通过其系统函数的收敛域是否包含单位圆来判断，包含时系统稳定，否则不稳定。

总之，任何离散系统的稳定性都可以通过其系统函数的收敛域是否包含单位圆来判断，包含时系统稳定，否则不稳定。

表 5.3 总结了稳定系统的冲激响应序列类型与  $z$  变换收敛域的关系。

表 5.3 稳定系统的冲激响应序列类型与  $z$  变换收敛域的关系

收敛域	$R_{f-} <  z  < R_{f+}$ 且 $R_{f-} < 1 < R_{f+}$	$R_{f-} <  z $ 且 $R_{f-} < 1$	$ z  < R_{f+}$ 且 $1 < R_{f+}$
冲激响应序列的类型	双边	因果	反因果

**例 5.19** 分析例 5.18 所示系统的稳定性。

**解** 对该系统的极点，有  $|p_1| = |0.2| < 1$  和  $|p_2| = |-0.8| < 1$ ，满足系统稳定条件，因此该系统稳定。

**例 5.20** 图 5.12 示出了一个离散反馈控制系统方框图。已知它的正向传输函数  $G_1(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$ ，而它的反向传输函数  $G_2(z) = 2Kz^{-1}$ ，求使系统稳定的  $K$  值范围。

**解** 该离散闭环系统的系统函数与连续系统的求法相似，即

$$H(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} = \frac{\frac{1}{1-2z^{-1}}}{1 + \frac{2Kz^{-1}}{1-2z^{-1}}}$$

$$= \frac{1}{1 + 2(K-1)z^{-1}} \Rightarrow p = 2(K-1)$$

因此，系统稳定条件是  $|2(K-1)| < 1$ ，即当  $0.5 < K < 1.5$  时，系统稳定。

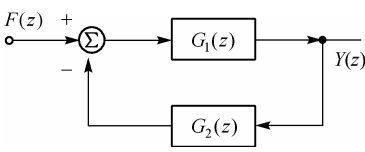


图 5.12 离散反馈控制系统方框图



### 5.5.4 离散系统的z域模拟

我们已经看到,  $N$  阶差分方程描述的离散系统的系统函数为式 (5.56) 给出的  $N$  阶有理多项式。把它与式 (4.58) 比较后可以发现, 两者具有相同的表示式, 差别仅在于用这里的  $z^{-1}$  取代那里的  $s^{-1}$ , 即用单位延迟器取代积分器。因此可由式 (5.56) 得到其最简形式的直接型实现, 如图 5.13 所示。

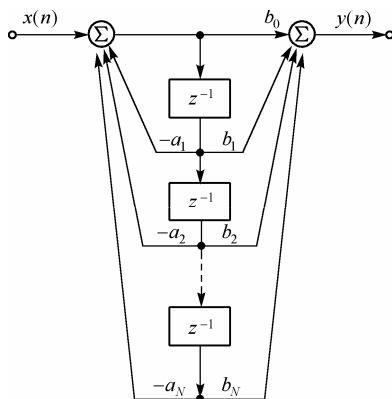


图 5.13 直接型实现

这表明, 该系统能用图 5.13 所示的  $z$  域模拟图实现, 这是离散系统的直接型实现。其中, 单元  $z^{-1}$  是用移位寄存器实现的单位延迟器。因此, 离散系统可由延迟器、加法器和乘法器构成。

同样地, 对系统函数的分子多项式和分母多项式分别进行因式分解, 并把共轭的零点配对, 也把共轭的极点配对, 然后组合, 就有

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^k H_i(z) \quad (5.59)$$

式中,

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}} \quad \text{或} \quad H_i(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}z^{-1}} \quad (5.60)$$

并且所有的系数都是实数。这表明, 它可用  $k$  个二阶系统或一阶系统的级联实现。其中, 每个由共轭极点因子和共轭零点因子组成的二阶子系统可用  $N=2$  和  $M=2$  时的图 5.13 给出的直接型系统实现, 而由实极点因子和实零点因子组成的一阶子系统可用  $N=1$  和  $M=1$  时的图 5.13 给出的直接型系统实现。这就是如图 5.14 所示的离散系统串联型实现。

利用部分分式展开法把  $N$  阶系统的系统函数表示为  $N$  个一阶反馈系统的并联, 并把两个系数互相共轭的一阶系统组合成一个二阶系统后, 有

$$H(z) = b_0 + \sum_{i=1}^{N_1} H_i(z) + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} H_i(z)$$

式中,

$$H_i(z) = \begin{cases} \frac{K_{i0}}{1 + a_{i1}z^{-1}} & i \leq N_1 \\ \frac{K_{i0} + K_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}} & i > N_1 \end{cases} \quad (5.61)$$

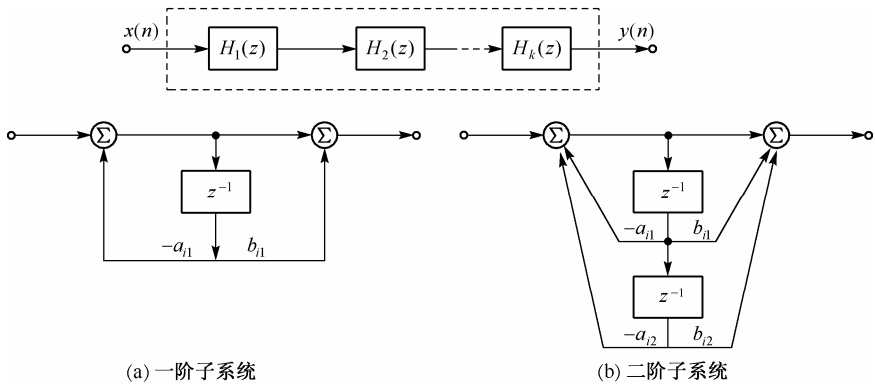


图 5.14 离散系统的串联型实现

并且所有的系数都是实数。这表明，它可用一阶系统、二阶系统的并联实现。其中，每个由共轭极点部分分式组成的二阶子系统可用  $N = 2$  和  $M = 1$  时的图 5.13 给出的直接型系统实现，而每个由实极点部分分式组成的一阶子系统可用  $N = 1$  和  $M = 0$  时的图 5.13 给出的直接型系统实现。这就是如图 5.15 所示的离散系统并联型实现。

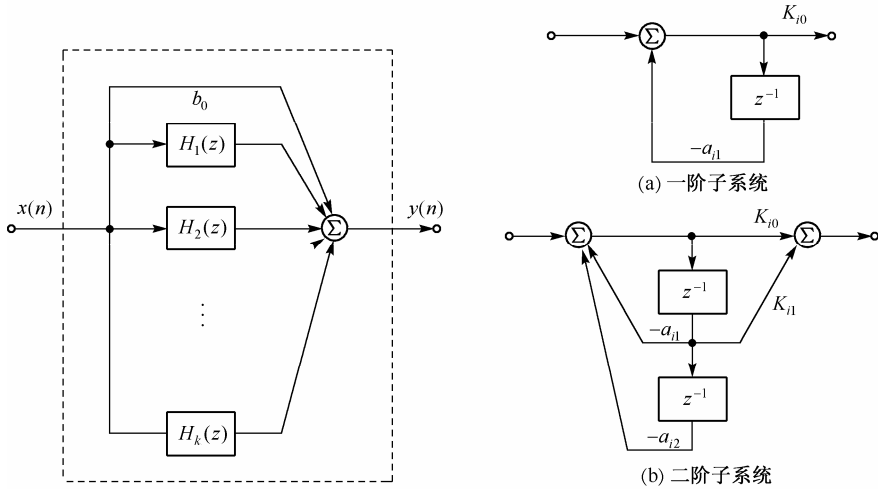


图 5.15 离散系统的并联型实现

**例 5.21** 求例 5.18 中二阶离散系统的  $z$  域模拟图。  
**解** 这是  $N = 2$  和  $M = 1$  时的二阶实系数系统，其系统函数为

$$H_i(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1} - 0.16z^{-2}}$$

则有如图 5.16 所示的  $z$  域模拟图。

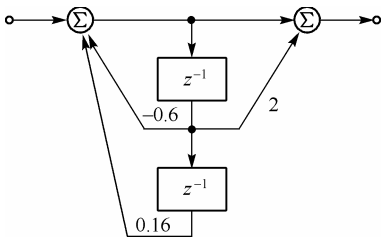


图 5.16 例 5.21 的  $z$  域模拟图

**例 5.22** 求  $M$  阶滑动平均离散系统  $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r f(n-r)$  的  $z$  域模拟图。

**解** 这是一般系统在  $N=0$  时的特殊情况, 它构成长  $M$  的 FIR 数字滤波器。此时反馈系统函数  $H_1(z)=1$ , 使得系统仅有前馈环节, 即  $H(z) = H_2(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$ 。于是, 有图 5.17 所示的系统  $z$  域模拟图。

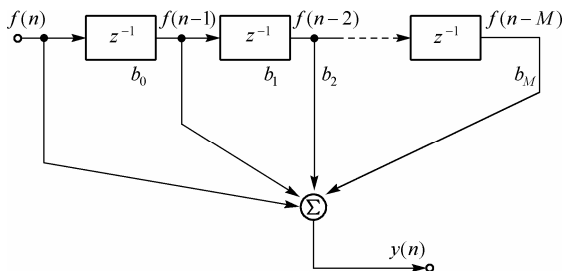


图 5.17 例 5.22 系统的实现

## 5.6 离散信号的频域分析

### 5.6.1 离散信号傅里叶变换的定义

离散信号  $f(n)$  可用  $z$  逆变换表示为

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \quad (5.62)$$

式中,  $C$  是包围  $F(z)z^{n-1}$  所有极点的逆时针闭合积分路线, 通常选择  $z$  平面收敛域内以原点为中心的圆。假设  $F(z)z^{n-1}$  在单位圆上无极点, 则选  $C$  为单位圆, 即  $z = e^{j\omega}$ , 其中  $\omega \in (-\pi, \pi]$ , 有

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (5.63)$$

这表明离散信号  $f(n)$  是周期频谱  $F(e^{j\omega})$  的傅里叶级数展开系数, 如图 5.18 所示, 即

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{j\omega}} = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (5.64)$$

式 (5.64) 给出了离散信号傅里叶变换的定义, 也表明了离散信号的傅里叶变换 (即频谱)  $F(e^{j\omega}) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$  就是离散信号的  $z$  变换在单位圆上的取值 (如图 5.18 所示), 并且它一定是周期等于  $2\pi$  的周期函数 [当  $f(n)$  是非周期信号时,  $F(e^{j\omega})$  一定是连续的]。这样, 离散信号的幅度谱  $|F(e^{j\omega})|$  和相位谱  $\varphi(\omega)$  也都是周期等于  $2\pi$  的周期函数。因此, 我们只需画出范围于  $\omega \in (-\pi, \pi]$  的频谱图即可。另外, 式 (5.63) 给出了离散信号的傅里叶逆变换。

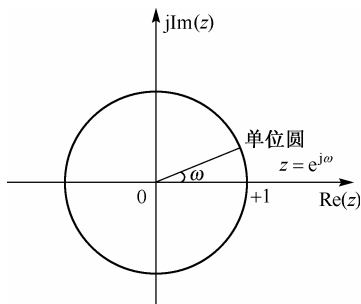


图 5.18 傅里叶变换与  $z$  变换的关系

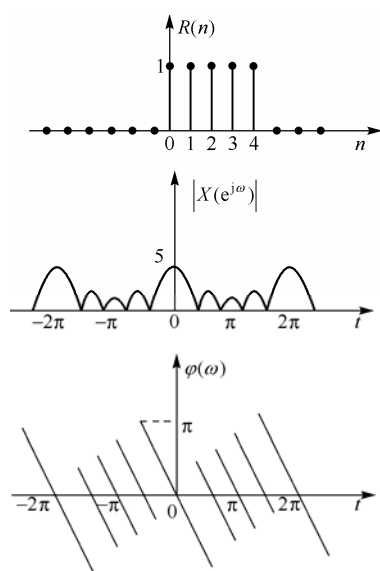


图 5.19 例 5.23 的图示

离散信号  $f(n)$  与它的傅里叶变换(周期频谱)  $F(e^{j\omega})$  构成了一个傅里叶变换对, 记做  $f(n) \Leftrightarrow F(e^{j\omega})$ 。

**例 5.23** 求  $G_5(n) = u(n) - u(n-5)$  的频谱。

**解** 由式(5.64)有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{jn\omega} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(2.5\omega)}{\sin(0.5\omega)}$$

可知幅度谱为

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(2.5\omega)}{\sin(0.5\omega)} \right|$$

相位谱为

$$\varphi(\omega) = -2\omega + \pi \operatorname{sgn} \left[ \frac{\sin(2.5\omega)}{\sin(0.5\omega)} \right] \operatorname{sgn}(\omega)$$

如图 5.19 所示。

## 5.6.2 周期离散信号的傅里叶变换——离散傅里叶变换(DFT)

因为由傅里叶级数理论可知, 周期信号一定有离散谱, 所以, 当离散信号  $f(n)$  为周期  $T$  等于  $N$  的周期信号时, 即对任何整数  $k$ , 当  $f(n+kN) = f(n)$  时, 其频谱一定是离散函数, 并且基频  $\omega_1 = 2\pi/T = 2\pi/N$ 。另一方面, 离散信号的频谱一定是周期等于  $2\pi$  的周期函数, 这样周期离散信号的频谱一定是周期离散函数, 并且一周期内有且仅有  $N$  根谱线。所以, 可认为周期等于  $N$  的离散周期信号的频谱也是周期等于  $N$  的离散周期函数。于是有

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F \left( e^{j\frac{2\pi k}{N}} \right) e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W_N^{-nk} \quad (5.65)$$

式中,

$$F(k) = F \left( e^{j\frac{2\pi k}{N}} \right) = F(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = F(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} \quad (5.66)$$

和  $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ 。利用  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} = \delta(n)$ , 从式(5.65)易证

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W_N^{nk} \quad (5.67)$$

式(5.67)给出了离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT), 而式(5.65)给出了离散傅里叶逆变换(Inverse DFT, IDFT)。实际上, 我们可把长  $N$  的有限长离散序列  $f(n)$  作为周期序列的基周期, 同样可使用 DFT 计算它对应的周期序列的离散频谱, 再用 IDFT 复原该周期序列, 取其基周期后, 则可复原该有限长序列。实际上, 我们要在 DFT 域处理  $F(k)$  后再取 IDFT, 复原处理后的有限长序列。

周期(或有限长)离散信号  $f(n)$  与它的傅里叶变换(DFT 谱)  $F(k)$  构成了一个 DFT 对, 记做  $f(n) \Leftrightarrow F(k)$ 。

式(5.66)表明, 有限长序列  $f(n)$  的 DFT 是  $f(n)$  的  $z$  变换在单位圆上等间隔采样的样本值, 如图 5.20 所示。

要注意, DFT 是一大类离散正交变换中最常用的一个离散正交变换。这类离散正交变换本身是精确的, 并没有误差。但是当它们被用于近似相应的连续正交变换时, 就会引入计算上的近似。例如, 如用 DFT 技术计算信号的连续谱时, 就会引入近似。

另外, 由于 DFT 有许多快速傅里叶变换(Fast FT, FFT)算法, 因此在数字信号处理中有着极其广泛的应用。

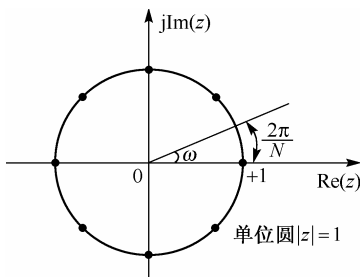


图 5.20 DFT 与  $z$  变换的关系

### 5.6.3 离散信号傅里叶变换和DFT的性质

由于离散信号傅里叶变换是傅里叶变换应用于离散信号的特例, 而 DFT 是傅里叶变换应用于周期离散信号的特例, 因此它们都具有一般傅里叶变换的性质, 在这里就不一一列举了, 感兴趣的读者可参阅有关书籍。

## 5.7 离散系统的频域分析与数字滤波器

本节讨论 LTI 离散系统的频率特性, 并介绍几种常用的数字滤波器的原理。

### 5.7.1 LTI离散系统的频率特性

系统频率特性定义为系统单位采样响应的傅里叶变换

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-jk\omega} = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(e^{j\omega})} \quad (5.68)$$

式中,  $|H(e^{j\omega})|$  是系统幅频特性;  $\varphi(e^{j\omega})$  是系统的相频特性。式(5.68)也给出了系统频率特性与系统函数的关系。

### 5.7.2 正弦序列通过LTI离散系统

与频率响应在连续系统中的地位和作用相似, 在离散系统中也经常要对输入信号的频谱进行处理, 因此有必要研究离散系统在离散正弦作用下的响应, 即频率响应。

首先我们要证明, 离散正弦是 LTI 离散系统的本征函数, 即离散正弦可形状不变地通过任何 LTI 离散系统, 输出正弦与输入正弦仅在幅度和相位发生变化。

设因果系统的单位采样响应为  $h(n)$ , 输入为  $f(n) = e^{jn\omega_0}$ , 则系统零状态响应为

$$y(n) = f(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)f(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)e^{-jk\omega_0}e^{jn\omega_0} = H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0} \quad (5.69)$$

显然, 当  $f(n) = e^{-jn\omega_0}$  时,

$$y(n) = H(e^{-j\omega_0})e^{-jn\omega_0} = [H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0}]^*$$

这样, 当  $f(n) = \cos(n\omega_0) = \frac{1}{2}[e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}]$  时,

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2} \left\{ H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0} + [H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0}]^* \right\} \\ &= |H(e^{j\omega_0})| \cos(n\omega_0 + \varphi(e^{j\omega_0})) \end{aligned} \quad (5.70)$$

这表明, 离散正弦可形状不变地通过任何 LTI 离散系统, 输出正弦与输入正弦相比, 仅在幅度上乘以系统幅频特性在此离散正弦频率上的取值  $|H(e^{j\omega_0})|$  和相移了系统相频特性在此离散正弦频率上的取值  $\varphi(e^{j\omega_0})$ 。

**例 5.24** 设 5 Hz 的正弦加上 50 Hz 的工频干扰组成的信号经采样频率等于 250 Hz 的采样器采样后, 输入到数字平滑滤波器, 已知该滤波器的输出为  $y(n) = \frac{1}{5}[f(n+2) + f(n+1) + f(n) + f(n-1) + f(n-2)]$ 。要求分析它能否滤除工频干扰?

**解** 取系统方程的  $z$  变换后, 有系统函数

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2}}{5}$$

则系统的频率特性为

$$\begin{aligned} F(e^{j\omega T}) &= \frac{e^{j2\omega T} + e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T}}{5} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega T\right)}{5\sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right)} \end{aligned}$$

其中,  $\omega T = 2\pi \frac{f}{f_s} = \frac{\pi f}{125}$ 。当  $f = 5$  Hz 时, 有

$$F(e^{j\omega T}) = \frac{\sin\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{5\pi}{125}\right)}{5\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{125}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{5\sin\left(\frac{\pi}{50}\right)} = 0.984\ 08$$

即频率为 5 Hz 的有用正弦分量无相移并且几乎无衰减地通过系统; 而当  $f = 50$  Hz 时, 有

$$F(e^{j\omega T}) = \frac{\sin\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{50\pi}{125}\right)}{5\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{50\pi}{125}\right)} = \frac{\sin(\pi)}{5\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = 0$$

即 50 Hz 工频干扰完全被该系统滤除。

**例 5.24** 虽然简单, 但它清晰地说明了通过对系统频率特性的设计, 可以得到所需的数字滤波功能。

### 5.7.3 数字滤波器

#### 1. 理想低通数字滤波器

理想低通滤波器是具有矩形低通特性  $H(e^{j\omega}) = G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega m}$  的离散系统, 其中截止频率  $0 < \omega_c < \pi$ 。由于

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega = \frac{\sin n\omega_c}{n\pi} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(n\omega_c)$$

$$\text{则} \quad \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(n\omega_c) \Leftrightarrow G_{2\omega_c}(\omega) \quad (5.71)$$

所以, 理想低通滤波器的单位采样响应是

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(n-m)) \quad (5.72)$$

**例 5.25** 已知理想数字低通滤波器的频率特性为  $H(e^{j\omega}) = G_{\pi/2}(\omega)$ , 如图 5.21(a) 所示, 求其单位采样响应  $h(n)$ 。

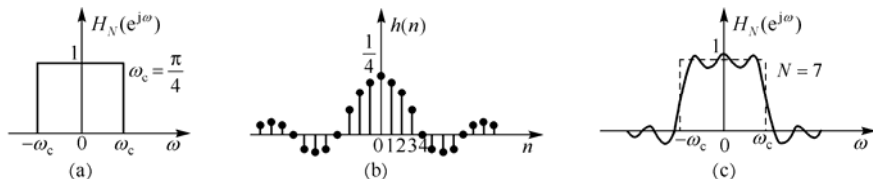


图 5.21

**解** 由式(5.67)有

$$h(n) = \frac{1}{4} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

如图 5.21(b) 所示。理想数字低通滤波器是一个具有无限持续时间单位采样响应 (Infinite-duration Impulse Response, IIR) 的非因果的数字滤波器。实际实现的数字低通滤波器必须把它截断成有限持续时间单位采样响应 (Finite-duration Impulse Response, FIR) 的数字滤波器, 此时实际的频率特性  $H_N(e^{j\omega})$  会是理想频域特性与长  $2N+1$  的时窗序列的傅里叶变换的卷积。

图 5.21(c) 示出了  $N=7$  时的  $H_N(e^{j\omega})$ , 从中显见频域的 Gibbs 现象。

#### 2. 全通数字滤波器\*

全通数字滤波器是零点个数与极点个数相等、并且零点与极点配对地关于单位圆反演对称的滤波器, 即所有零极点都满足  $z_i = (p_i^*)^{-1} = r_i^{-1}e^{j\theta_i}$ , 其中  $p_i = r_i e^{j\theta_i}$  ( $r_i < 1$ )。因此, 它可表示为

$$H_{\text{ap}}(z) = A \prod_{i=1}^N \frac{z^{-1} - p_i^*}{1 - p_i z^{-1}} \quad (5.73)$$

式中,  $A$  为正常数。实际组成时, 全通滤波器由  $M_r$  个实零极点对组成的一阶全通节和  $M_c$  个复共轭零极点对组成的二阶节级联构成, 其中  $M_r + 2M_c = N$ 。其中, 一阶全通节

$$\frac{e^{-j\omega} - d_i}{1 - d_i e^{-j\omega}} = \exp\{j\varphi_{ri}(\omega)\} \quad (5.74)$$

有相位特性

$$\varphi_{ri}(\omega) = -\omega - 2\arctan \frac{d_i \sin \omega}{1 - d_i \cos \omega} \quad (5.75)$$

二阶全通节

$$\frac{(e^{-j\omega} - r_i e^{-j\theta_i})(e^{-j\omega} - r_i e^{j\theta_i})}{(1 - r_i e^{j\theta_i} e^{-j\omega})(1 - r_i e^{-j\theta_i} e^{-j\omega})} = \exp\{j\varphi_{ci}(\omega)\} \quad (5.76)$$

有相位特性

$$\varphi_{ci}(\omega) = -2\omega - 2\arctan \frac{r_i \sin(\omega - \theta_i)}{1 - r_i \cos(\omega - \theta_i)} - 2\arctan \frac{r_i \sin(\omega + \theta_i)}{1 - r_i \cos(\omega + \theta_i)} \quad (5.77)$$

可见, 全通网络是一个总相移量  $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{M_r} \varphi_{ri}(\omega) + \sum_{i=1}^{M_c} \varphi_{ci}(\omega)$  有非线性相移特性的系统, 是一个纯相移网络。

从式(5.74)和式(5.76)可见,  $\varphi_{ri}(0) = 0$  和  $\varphi_{ci}(0) = 0$ ; 同时, 从式(5.75)和式(5.77)可知, 对所有的  $\omega \in (0, \pi)$ , 有

$$\varphi'_{ri}(\omega) = -\frac{1 - d_i^2}{(1 - d_i \cos \omega)^2 + (d_i \sin \omega)^2} < 0 \quad (5.78)$$

和

$$\varphi'_{ci}(\omega) = -\left\{ \frac{\frac{1 - r_i^2}{[1 - r_i \cos(\omega - \theta_i)]^2 + [r_i \sin(\omega - \theta_i)]^2} + \frac{1 - r_i^2}{[1 - r_i \cos(\omega + \theta_i)]^2 + [r_i \sin(\omega + \theta_i)]^2}}{2} \right\} < 0 \quad (5.79)$$

这意味着全通滤波器的连续相位函数是递减的, 其导数之负总是正的。这使得对所有的  $0 < \omega \leq \pi$ , 有  $\varphi(\omega) < \varphi(0) = 0$ , 即其连续相位函数总是负的。

### 3. 最小相位数字滤波器\*

系统稳定性要求所有的极点必须位于  $z$  平面单位圆内。因此, 当系统幅频特性确定时, 只有零点位置可供选择。

定义所有的零点均处于  $z$  平面单位圆内的稳定系统(即所有的零、极点均位于  $z$  平面单位圆内的系统)为最小相位系统。根据此定义易知, 最小相位系统是一个可逆的因果稳定系统, 并且其逆系统仍是一个最小相位系统。因为最小相位系统的零、极点变成其逆系统的极、零点, 使得逆系统的零、极点仍然都在  $z$  平面单位圆内。

显然, 非最小相位的因果稳定系统可以由最小相位滤波器级联一个使零点移到  $z$  平面单



位圆外的全通滤波器构成, 该全通滤波器的极点为最小相位滤波器的零点, 以此对消原有零点, 全通滤波器的零点与其极点关于  $z$  平面单位圆反演对称。由上一小节的讨论可知,  $\varphi(0)=0$ , 并且对所有的  $0 < \omega \leq \pi$ , 全通滤波器的连续相位函数总是负的。因此, 把零点从  $z$  平面单位圆内反射到  $z$  平面单位圆外总会使连续相位函数减小, 使得相位负值(即相位滞后)增加, 因此最小相位系统实际上是具有最小连续相位滞后特性的系统。更确切地, 应称它为最小相位滞后系统。但习惯上称为最小相位系统。

同样地, 可称具有最小相位特性的信号为最小相位信号。

定义离散信号  $h(n)$  的对数谱的傅里叶逆变换为复倒谱信号  $\hat{h}(n)$ , 即

$$\hat{h}(n) \Leftrightarrow \ln H(e^{j\omega})$$

$$\text{由} \quad nf(n) \Leftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = j \frac{d}{d\omega} F(e^{j\omega}) \quad (5.80)$$

$$\text{可得} \quad H(e^{j\omega}) j \frac{d}{d\omega} \ln H(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} H(e^{j\omega}) \Leftrightarrow h(n) * n\hat{h}(n) = nh(n) \quad (5.81)$$

利用  $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ( $|x| < 1$ ), 由式(5.57)可知, 当信号  $h(n)$  为最小相位信号时, 其所有的零、极点都在  $z$  平面单位圆内。这使得

$$\begin{aligned} \ln H(z) &= \ln b_0 + \sum_{i=1}^N \ln(1 - z_i z^{-1}) - \sum_{i=1}^N \ln(1 - p_i z^{-1}) \\ &= \ln b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} \left( \sum_{i=1}^N z_i^k - \sum_{i=1}^N p_i^k \right) \Leftrightarrow \hat{h}(n) = \begin{cases} \ln b_0 & n=0 \\ \frac{1}{n!} \left( \sum_{i=1}^N z_i^n - \sum_{i=1}^N p_i^n \right) & n>0 \\ 0 & n<0 \end{cases} \quad (5.82) \end{aligned}$$

这证明了最小相位信号  $h(n)$  的复倒谱  $\hat{h}(n)$  是因果稳定的, 反之亦然。并且, 如果信号  $h(n)$  是最小相位的, 则  $nh(n) = h(n) * n\hat{h}(n) = \sum_{m=1}^n m\hat{h}(m)h(n-m)$ , 于是有如下递归计算最小相位信号

$h(n)$  的复倒谱  $\hat{h}(n)$  的公式:

$$\hat{h}(1) = \frac{h(1)}{h(0)} \quad \text{和} \quad \hat{h}(n) = \frac{h(n)}{h(0)} - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} m\hat{h}(m) \frac{h(n-m)}{h(0)} \quad (5.83)$$

#### 4. 线性相位数字滤波器\*

由于带极点的 IIR 数字滤波器难以实现线性相位特性, 因此, 线性相位滤波器一般都由只含零点的 FIR 数字滤波器构成。它可用长  $M$  的抽头延迟线组成。用权系数具有中心偶对称性  $b_{M-i} = b_i$  或中心奇对称性  $b_{M-i} = -b_i$  的 FIR 数字滤波器可以容易地实现线性相位滤波器。

下面我们以长度  $M=2L$  的中心偶对称的 FIR 数字滤波器来分析如何实现线性相位滤波。此时, 把  $b_{2L-i} = b_i$  代入系统函数后, 有

$$H(z) = \sum_{i=0}^{L-1} b_i \left( z^{-i} + z^{-(2L-i)} \right) + b_L z^{-L} = z^{-L} \left[ b_L + \sum_{i=0}^{L-1} b_i \left( z^{L-i} + z^{-(L-i)} \right) \right] \tag{5.84}$$

可得  $H(e^{j\omega}) = e^{-jL\omega} \left[ b_L + \sum_{i=0}^{L-1} b_i \left( e^{j(L-i)\omega} + e^{-j(L-i)\omega} \right) \right] = e^{-jL\omega} \left[ b_L + \sum_{i=0}^{L-1} 2b_i \cos(L-i)\omega \right]$  (5.85)

此时，为了使系统具有线性相位特性  $\varphi(e^{j\omega}) = -L\omega$ ，只需使  $b_L + \sum_{i=0}^{L-1} 2b_i \cos(L-i)\omega$  逼近所需的滤波器幅频特性  $|H(j\omega)|$  即可。这不难做到，因为具有中心偶对称特性的权系数实际上是所需的具有中心偶对称性的数字滤波器的幅频特性的截断傅里叶级数展开式系数。

5. 高品质因数的二阶陷波滤波器\*

与模拟滤波器很难做出高品质因数的二阶陷波滤波器不同，数字滤波器容易做出高品质因数的二阶陷波滤波器。它有如下所示的 IIR 数字滤波器：

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}{1 - 2(1 - \varepsilon)z^{-1} \cos \omega_0 + (1 - \varepsilon)^2 z^{-2} \cos^2 \omega_0} \tag{5.86}$$

式中， $\varepsilon$  是一个接近于零的小正数。其共轭零点  $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$  在  $z$  平面单位圆上，其共轭极点  $p_{1,2} = (1 - \varepsilon)e^{\pm j\omega_0}$  在  $z$  平面单位圆内并紧邻相应零点，且与相应零点有相同的幅角。

显然， $H(e^{j\omega_0}) = 0$  使该滤波器具有陷波功能。并且如图 5.22 (a) 所示，两个半功率频率点与近邻极点形成一个等腰直角三角形，使得其半功率带宽 BW 等于其斜边  $2\varepsilon$ ，即  $BW = 2\varepsilon$ ，其中  $\varepsilon$  是零极点间距。这样，其品质因数为  $Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{1}{2\varepsilon}$ 。显然，只要选择零、极点间距  $\varepsilon$  为足够接近于零的小正数，该二阶数字陷波滤波器的品质因数就可达到足够高。

由零极点分布可以证明，当  $\omega \neq \omega_0$  时，忽略掉更高阶无穷小量后，该滤波器的幅频特性为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega - \omega_0}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega + \omega_0}{2}} \right) \right]^{-1/2} \tag{5.87}$$

其波形如图 5.22 (b) 所示。

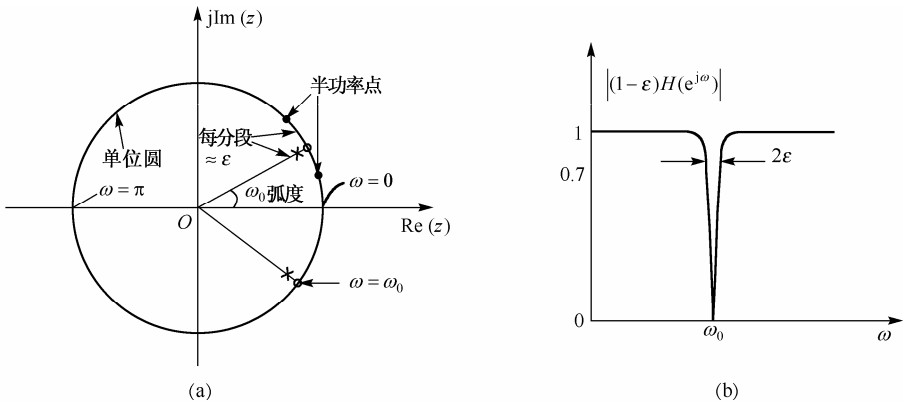


图 5.22 二阶数字陷波滤波器的零、极点分布与幅频特性

## 本章小结

1. 离散信号仅在离散点上有定义, 最重要的基本信号有单位采样序列和阶跃序列, 前者是后者的差分, 后者是前者的累计和。任何序列都可以表示为单位采样序列的线性组合, 即序列与单位采样序列的卷积和。

2. LTI 离散系统的数学模型是一个线性常系数差分方程。它的零状态响应为输入序列与系统单位采样响应的卷积和。卷积和可以使用解析法、图解法和变换法来计算。其中, 系统单位采样响应是系统对单位采样序列的零状态响应。阶跃响应是系统对单位阶跃序列的零状态响应, 它是系统单位采样响应的累计和, 而系统单位采样响应是系统阶跃响应的差分。

3.  $z$  变换是离散信号的幂级数展开描述, 它是分析离散信号与系统的重要工具, 其性质和作用类似于连续信号与系统中的拉普拉斯变换。

4. 利用  $z$  变换, 可以方便地计算离散系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

5. 系统函数是单位采样响应的  $z$  变换, 它由系统的零、极点分布决定, 系统的极点分布决定了系统的稳定性。使用系统函数可以方便地分析离散系统的各种模拟实现图。

6. 使用部分分式分解技术可有效地计算  $z$  逆变换。

7. 离散信号的傅里叶变换是把离散信号分解为无穷多个复指数序列的线性组合, 结果是周期频谱。实际上离散信号是其周期频谱的傅里叶系数。

8. 系统频率特性是单位采样响应的傅里叶变换, 其模值是系统幅频特性, 其幅角是系统相频特性。

9. 周期离散信号的离散傅里叶变换(DFT)是把周期离散信号分解为若干个周期正弦信号的线性组合, 结果是周期离散频谱。周期离散信号与其离散傅里叶变换互为傅里叶系数。有限长序列可借用 DFT 技术进行分析和处理。

10. 通过巧妙设置零、极点分布, 可实现低通、带通、高通、带阻滤波, 也可以实现最小相位滤波、线性相位滤波、高品质因数陷波滤波等。

## 习题

5.1 已知  $f_1(n) = nu(n)$  和  $f_2(n) = 2^{n-1}u(n)$ , 试分别绘出下述各序列的图形。

(1)  $f_1(n) + f_2(n)$       (2)  $f_1(n) \cdot f_2(n)$       (3)  $f_1(n-1) \cdot f_2(n+1)$

(4)  $f_1\left(\frac{n}{2}\right)$       (5)  $f_2(-n)$

5.2 试分别画出下述各序列的图形。

(1)  $f(n) = u(n-2) - u(n-6)$       (2)  $f(n) = u(n+2) + u(-n)$

(3)  $f(n) = 0.5(1 - 0.5^{n+1})u(n)$       (4)  $f(n) = 2\delta(n) + \delta(n-2) + 3\delta(n-3) + 2\delta(n+1)$

(5)  $f(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)u(n)$       (6)  $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)u(n)$

5.3 下列系统中  $x(n]$  表示系统激励,  $y(n)$  表示系统的响应。判断系统是否为线性、时不

变和因果系统?

$$(1) y(n] = 2x(n) + 3$$

$$(2) y(n) = x(n) \cos\left(\frac{2n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$(3) y(n) = [x(n)]^2$$

$$(4) y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

$$(5) y(n) = \frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$$

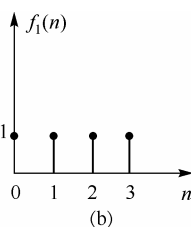
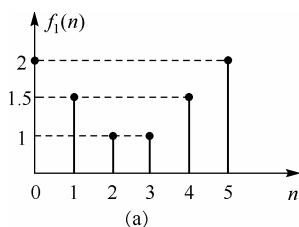
5.4 系统的差分方程为  $y(n] - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$  , 已知起始条件为  $y(-1) = 0$  , 分别求以下输入序列时的输出  $y(n)$  , 并绘出其波形。

$$(1) x(n) = \delta(n)$$

$$(2) x(n) = u(n)$$

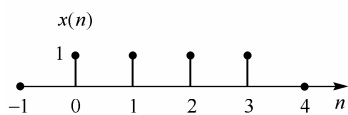
$$(3) x(n) = G_5(n)$$

5.5 已知序列  $f_1(n)$  和  $f_2(n)$  如题图 5.5 所示, 试计算两者的卷积和。

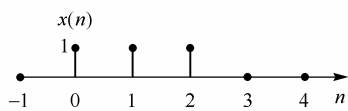
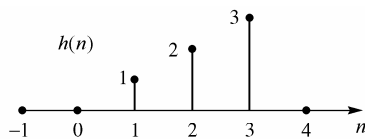


题图 5.5

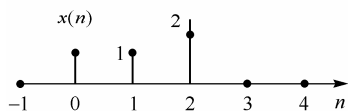
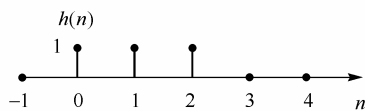
5.6 已知各系统的激励  $x(n]$  和单位采样响应  $h(n)$  的波形如题图 5.6 所示, 求其零状态响应的波形。



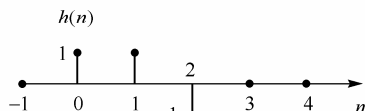
(a)



(b)



(c)



题图 5.6

5.7 计算并画出下列离散系统的单位采样响应和阶跃响应。

$$(1) y(n] - 0.8y(n-1) = x(n)$$

$$(2) y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n)$$

$$(3) y(n) - y(n-2) = x(n-1) - x(n-2)$$

5.8 已知离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应为  $g(n) = \left[ 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^n + \left( -\frac{3}{2} \right)^n \right] u(n)$ , 求该系统的单位采样响应  $h(n)$ 。

5.9 设离散系统的单位采样响应为  $h(n) = \left( \frac{1}{3} \right)^n u(n)$ , 输入信号  $f(n) = 2^n u(n)$ , 求该系统的零状态响应。

5.10 设某离散系统的单位采样响应为  $h(n) = a^n u(n)$ , 其中  $0 < a < 1$ , 输入信号  $f(n) = u(n) - u(n-6)$ , 求该系统的零状态响应。

5.11 用卷积和定理证明以下关系。

$$(1) u(n) * u(n) = (n+1)u(n) \quad (2) f(n) * \delta(n-m) = f(n-m)$$

5.12 已知下列离散系统的差分方程、输入激励序列以及初始条件, 求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

$$(1) y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = f(n), \quad f(n) = \delta(n), \quad y(-1) = 0;$$

$$(2) y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n), \quad f(n) = (0.5)^n u(n), \quad y(-1) = -\frac{1}{2}, \quad y(-2) = \frac{5}{4};$$

$$(3) y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = f(n), \quad f(n) = 2u(n), \quad y(-1) = -\frac{1}{2}, \quad y(-2) = \frac{5}{4}。$$

5.13 求下列离散信号的  $z$  变换, 并注明收敛域, 画出  $z$  变换的零极点图。

$$(1) f(n) = (0.5)^n u(n)$$

$$(2) f(n) = a^{-n} u(n)$$

$$(3) f(n) = \delta(n-2)$$

$$(4) f(n) = 0.5(1 - 0.5^{n+1})u(n)$$

$$(5) f(n) = (2^{-n} - 4^{-n})u(n)$$

$$(6) f(n) = u(n+2)$$

$$(7) f(n) = (-0.5)^n u(-n-1)$$

$$(8) f(n) = \delta(n) - \frac{1}{8}\delta(n-3)$$

$$(9) f(n) = (0.5)^n [u(n) - u(n-10)]$$

5.14 求下列  $F(z)$  的  $z$  逆变换。

$$(1) F(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

$$(2) F(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2}$$

$$(3) F(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)}$$

$$(4) F(z) = \frac{3z^2 + z}{(z-0.2)(z+0.4)}$$

$$(5) F(z) = \frac{z^{-5}}{z+2}$$

$$(6) F(z) = \frac{5z^{-1}}{1 - z^{-1} - 6z^{-2}}$$

$$(7) F(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$(8) F(z) = \frac{5z^{-1}}{1 - z^{-1} - 6z^{-2}}$$

5.15 已知系统函数和收敛域如下列所示, 求各系统的单位样值响应, 并说明该系统的稳定性与因果性。

$$(1) H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad |z| < \frac{1}{4}$$

$$(3) H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + 5z^{-1} + 6z^{-2}} \quad |z| > 3 \quad (4) H(z) = \frac{10z^{-1}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \quad 1 < |z| < 2$$

5.16 用  $z$  变换的性质求下列序列的  $z$  变换。

$$(1) f(n) = (n-3)u(n-3) \quad (2) f(n) = u(n) - u(n-N)$$

5.17 已知  $u(n) * u(n) = (n+1)u(n)$ ，求  $nu(n)$  的  $z$  变换。

5.18 求下列信号的卷积和。

$$\begin{aligned} (1) a^n u(n) * \delta(n-2) & \quad (2) 2^n u(n) * 3^n u(n) \\ (3) \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) * u(n) & \quad (4) [u(n) - u(n-4)] * [u(n) - u(n-4)] \\ (5) a^n u(n) * u(n-1) & \quad (6) [u(n) - u(n-4)] * \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ (7) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n) * \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n) & \quad (8) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n) * \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \end{aligned}$$

5.19 已知因果序列的  $z$  变换为  $F(z)$ ，试分别求下列原序列的初值。

$$\begin{aligned} (1) F(z) &= \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})} & (2) F(z) &= \frac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} \\ (3) F(z) &= \frac{2z}{(z-1)(z-2)} & (4) F(z) &= \frac{5z^{-1}}{1-z^{-1}-6z^{-2}} \end{aligned}$$

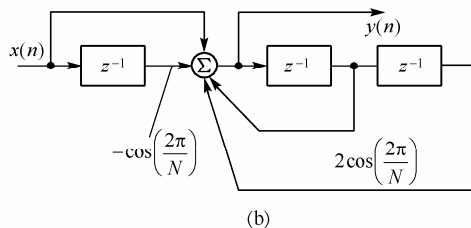
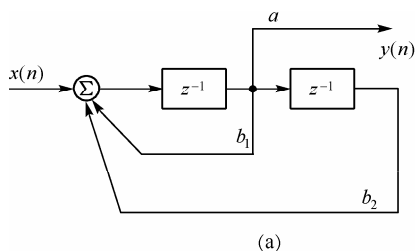
5.20 已知系统的输入为  $f(n) = 2\delta(n) - 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$ ，系统函数为  $H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}$ ，求系统的零状态响应。

5.21 若一离散时间 LTI 系统对激励  $x(n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$  所产生的零状态响应为  $y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ ，求该系统的差分方程和单位采样响应。

5.22 求离散系统  $y(n) - 0.7y(n-1) + 0.12y(n-2) = 2f(n) - f(n-1)$  的系统函数和单位采样响应。

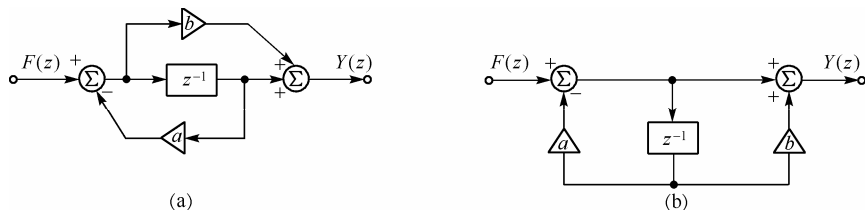
5.23 试画出离散系统  $y(n] + 4y(n-1) + 3y(n-2) = 4f(n) + f(n-1)$  的系统模拟图，并确定其阶跃响应。

5.24 列出题图 5.24(a) 和 (b) 所示离散系统的差分方程和系统函数  $H(z)$ 。



题图 5.24

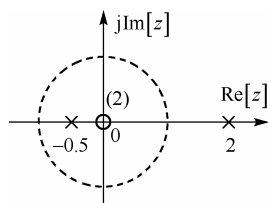
5.25 写出如题图 5.25(a)和(b)所示  $z$  域模拟图的离散系统的差分方程和系统函数, 并求其单位采样响应。



题图 5.25

5.26 已知某离散时间 LTI 因果系统的零、极点图如题图 5.26 所示, 且系统单位采样响应满足条件  $h(0) = 2$ , 求

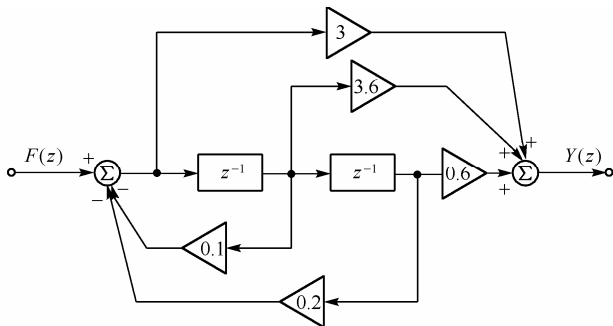
- (1) 系统函数  $H(z)$ ;
- (2) 系统的单位取样响应  $h(n)$ , 并判断该系统是否稳定;
- (3) 系统的差分方程;
- (4) 若已知激励为  $x(n)$  时, 系统的零状态响应为  $y(n) = 2^n u(n)$ , 求激励  $x(n)$ ;



题图 5.26

- (5) 当输入激励为  $x(n) = 5\cos(\pi n)u(n)$  时, 系统的稳态响应。

5.27 求如题图 5.27 所示的离散系统的差分方程、系统函数和单位采样响应, 并判断该系统是否稳定?



题图 5.27

5.28 求离散系统  $y(n) - \frac{1}{3}y(n-1] = f(n)$  的单位采样响应, 判断该系统是否稳定? 若系统零状态响应为  $y(n) = 3(2^{-n} - 3^{-n})u(n)$ , 求系统输入信号  $f(n)$ 。

5.29 设系统输入  $f(n) = u(n)$  时的零状态响应为  $y(n) = 2(1 - 0.5^n)u(n)$ , 求系统输入  $f(n) = 0.5^n u(n)$  时的零状态响应, 并判断该系统是否稳定?

5.30 设有一均值滤波器为一个二阶 MA 系统:  $y(n) = \frac{1}{3}[f(n) + f(n-1) + f(n-2)]$ , 判断该系统是否稳定, 并求其幅频特性和相频特性。

5.31 设系统  $F(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}$ , 绘出其  $z$  域模拟图, 判断系统是否稳定, 并画出系统的幅频特性和相频特性。

5.32 已知离散时间系统的差分方程为

$$y(n) + \frac{1}{5}y(n-1) - \frac{6}{25}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

求该系统的系统函数  $H(z)$ ，画出系统函数  $H(z)$  的零极点图，并求系统的单位取样响应  $h(n)$  和频率响应  $H(e^{j\omega})$ ，指出该系统是什么类型的系统？

5.33 已知离散 LTI 因果系统的系统函数  $H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}$ ， $a$  为实数。

(1) 假设  $0 < a < 1$ ，画出零极点图，指出收敛域，并确定  $a$  值在哪些范围内才能使系统稳定？

(2) 证明这个系统是全通系统。

5.34 求下列序列的傅里叶变换。

(1)  $x(n) = \delta(n-1)$

(2)  $x(n) = u(n) - u(n-8)$

(3)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$

(4)  $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n [u(n) - u(n-2)]$

(5)  $x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta(k-3m)$

(6)  $x(n) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi}$

5.35 求下列有限长序列的  $N$  点 DFT。

(1)  $x(n) = \delta(n)$

(2)  $x(n) = \delta(n-m) \quad 0 < m < N$

(3)  $x(n) = a^n R_N(n)$



# 第 6 章 系统的状态变量分析

## 学习要点

本章讨论连续系统和离散系统的状态变量分析。读者学习本章要注意掌握以下重要内容:

1. 依据电路的独立储能器件选择状态变量, 并列写相应的连续系统的状态方程;
2. 依据系统最简的传递函数、信号流图或实现框图, 列写相应的连续系统或离散系统的状态方程;
3. 使用变域技术或凯莱-哈密顿定理, 计算系统状态转移矩阵;
4. 使用时域法或变域法, 求解系统状态方程;
5. 线性变换对状态方程的影响;
6. 状态方程描述的系统稳定性判断方法。

## 6.1 引言

### 6.1.1 经典系统分析方法的局限性

经典系统分析方法包括时域法和变域法, 研究 LTI 系统的冲激响应、阶跃响应、零输入响应和零状态响应等时域特性及系统传递函数、幅频特性、相频特性等频域特性 (尤其是频率响应特性) 的概念。

但经典的线性系统理论不能揭示系统的内部特性, 不能有效地处理多输入-多输出系统, 也不易推广应用于分析时变系统或非线性系统。它仅适合于分析单输入-单输出的线性时不变系统的外部特性, 具有相当大的局限性。

### 6.1.2 状态变量分析理论的重要意义

卡尔曼 (Kalman) 提出的以状态变量分析为核心的现代系统理论, 用描述系统内部特性的状态变量取代了描述系统外部特性的系统函数, 这种描述可方便地运用于分析多输入-多输出系统, 他进一步提出的可控性和可观测性概念完整地揭示了系统内部特性, 使系统分析与设计发生了根本性的变革。状态空间法也能成功地应用于分析时变系统或非线性系统, 并能方便地使用计算机来求解系统。

现代控制理论、电路与系统的计算机辅助分析 (Computer-Aided Analysis, CAA) 和计算机辅助设计 (Computer-Aided Design, CAD), 乃至人工神经网络理论等都是在状态空间理论基础上发展起来的。

因此, 学习和掌握状态空间理论具有十分重要的意义。

### 6.1.3 基本概念

图6.1示出了串联谐振电路。如果只关心系统激励  $e(t)$  和响应  $u_C(t)$  之间的关系, 则有系统微分方程描述:

$$u_C''(t) + \frac{R}{L} u_C'(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{1}{LC} e(t) \quad (6.1)$$

显然，这是一种输入-输出描述法，它只能得到系统的输出如何随系统的输入变化，无法了解系统内部发生的变化及由此引起的输出变化，更无法得知如何控制系统内部的变化来达到所需的系统输出。

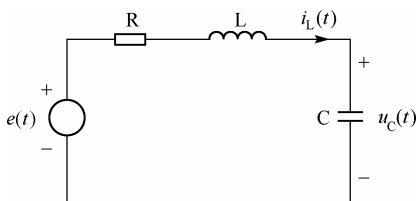


图 6.1 LC 串联谐振电路

如果需要了解系统内部储能元件的动态特性，则可列出方程

$$i_C(t) = C u_C'(t) \quad \text{和} \quad R i_L(t) + L i_L'(t) + u_C(t) = e(t)$$

它们可改写为

$$\begin{cases} i_L'(t) = -\frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} u_C(t) + \frac{1}{L} e(t) \\ u_C'(t) = \frac{1}{C} i_C(t) \end{cases} \quad (6.2)$$

这是以  $i_L(t)$  和  $u_C(t)$  作为系统状态变量的一阶微分方程组，我们可称这样的关于系统状态变量的一阶微分方程组为系统状态方程，它描述控制系统状态变化的动力学特性。显然，在给定系统状态变量的初始条件和系统激励的变化情况，根据此动力学特性，就可以确定系统状态变量的动态变化情况。

为便于系统分析，通常把系统状态方程以下述矩阵-矢量形式书写：

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}e(t) \quad (6.3)$$

对式(6.2)所示的系统，状态矢量为  $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$ ；系统参数矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

系统输出是系统状态变量和系统激励的线性组合，可用输出方程

$$r(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}e(t) \quad (6.4)$$

描述，在本例中，输出变量  $r(t) = u_C(t)$ ，系统参数矩阵  $\mathbf{C} = [0 \quad 1]$  和  $\mathbf{D} = [0]$ 。

### 6.1.4 状态变量分析方法的优点

状态变量分析方法具有以下一些优点：

(1) 便于研究系统内部物理量的动态变化特性。

(2) 与系统复杂程度无关, 差别仅在于系统激励矢量和状态矢量的维数不同, 无论是单输入-单输出 (Single Input Single Output, SISO)、单输入-多输出 (Single Input Multiple Output, SIMO)、多输入-单输出 (Multiple Input Single Output, MISO) 或多输入-多输出 (Multiple Input Multiple Output, MIMO), 都可用同一形式的状态方程描述。

(3) 也适用于时变系统或非线性系统, 此时状态方程及/或输出方程是时变的或非线性。

(4) 状态方程的特性参数鲜明地表征了系统的关键性能, 尤其是系统稳定性、系统可控性和系统可观性。

(5) 为系统的 CAA 或 CAD 提供了有效途径。

## 6.2 连续时间系统状态方程的建立

### 6.2.1 状态方程的一般形式

一个有  $m$  维输入、 $n$  维输出的动态系统可一般地表示为矢量一阶非线性时变微分方程:

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{X}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) \quad (6.5)$$

$$\text{输出方程} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) \quad (6.6)$$

式中,

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_k(t)]^T$$

$$\mathbf{e}(t) = [e_1(t) \quad e_2(t) \quad \cdots \quad e_m(t)]^T$$

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \quad r_2(t) \quad \cdots \quad r_n(t)]^T$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) = [f_1(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) \quad f_2(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) \quad \cdots \quad f_k(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t)]^T$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) = [h_1(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) \quad h_2(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t) \quad \cdots \quad h_n(\mathbf{X}(t), \mathbf{e}(t), t)]^T$$

对于线性时不变连续时间系统的特殊情况, 有

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \quad (6.7)$$

$$\text{输出方程} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \quad (6.8)$$

$$\text{式中,} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{bmatrix}$$

由状态方程式 (6.7) 和输出方程式 (6.8) 描述的系统具有图 6.2 所示的系统实现框图, 式中, 矢量积分器的输入为  $\mathbf{X}'(t)$ ; 输出为  $\mathbf{X}(t)$ 。

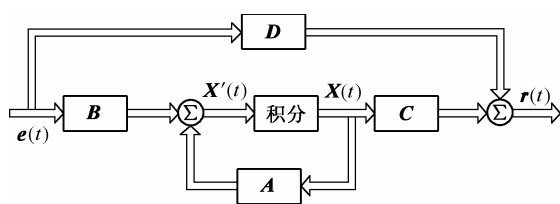


图 6.2 连续系统状态变量实现框图

### 6.2.2 由电路图直接建立状态方程

对于含有 RLC 的电路，选取电容电压和电感电流为状态变量(或它们的可逆线性变换)；对于仅含 LC 的电路，选取电容电荷和电感磁链为状态变量。注意，为确保矩阵  $\mathbf{A}$  可逆，每个状态变量必须是独立变量。通常，我们可以首先选取所有电容电压和电感电流为自变量；然后根据 KCL 和 KVL 列写电路方程；最后判断矩阵  $\mathbf{A}$  是否非奇异，若  $\mathbf{A}$  非奇异，则所选变量就是状态变量，否则消去多余自变量，只留下状态变量和输入变量，经整理后就得到所需的系统状态方程。

**例 6.1** 给定图 6.3 所示的电路，列写状态方程和以  $r(t)$  为输出的输出方程。

**解** 选取状态变量

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{cases} 2x_1(t) + x_1'(t) + x_3(t) = e_1(t) \\ \frac{1}{3}x_2'(t) + x_2(t) + e_2(t) = x_3(t) \\ \frac{1}{2}x_3'(t) + x_2(t) = x_1(t) \end{cases} \quad \text{和} \quad r(t) = x_2(t) + e_2(t)$$

写成矩阵矢量形式后，有状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ r(t) = [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{X}(t) + [0 \quad 1] \mathbf{e}(t) \end{cases}$$

注意，由于矩阵  $\mathbf{A}$  非奇异，所选状态变量的每个分量确实是独立变量，因此所列方程已无须化简。

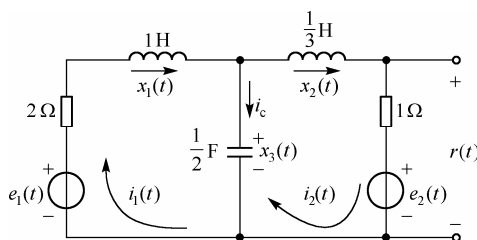


图 6.3 例 6.1 的电路

### 6.2.3 由信号流图建立状态方程

从4.4.7节可知,由系统微分方程或系统函数可以得到其直接型、串联型、并联型或并串型实现的信号流图,本节叙述如何依据这些流图建立其状态方程。

#### 1. 直接型结构

系统函数为有理函数

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

其直接型结构实现的信号流图如图 6.4 所示。

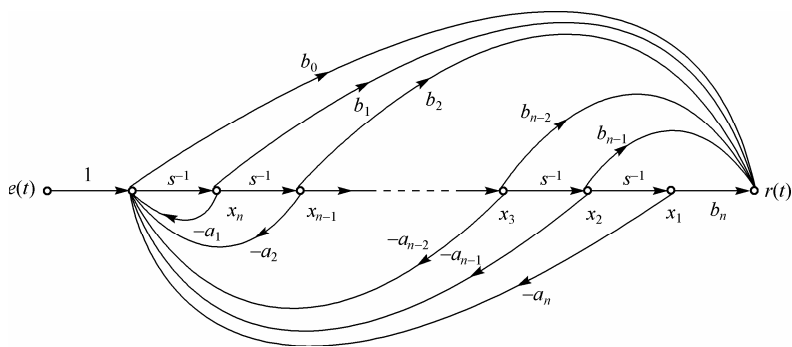


图 6.4 直接型结构实现的信号流图

在建立状态方程时,我们选取图 6.4 中每个积分器的输出作为状态变量,则有

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \\ x'_n(t) = e(t) - \sum_{i=1}^n a_i x_{n+1-i}(t) \end{cases} \quad (6.9)$$

$$r(t) = b_0 x'_n(t) + \sum_{i=1}^n b_i x_{n+1-i}(t) = b_0 e(t) + \sum_{i=1}^n (b_i - b_0 a_i) x_{n+1-i}(t)$$

写成矩阵矢量形式后,有状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 - b_0 a_2 \quad b_1 - b_0 a_1] \mathbf{X}(t) + b_0 e(t) \end{cases} \quad (6.10)$$

## 2. 串联型结构

通过部分分式分解和零极点配对, 可把系统函数分解为低阶子系统的串联, 即  $H(s) = \prod_i H_i(s)$ , 其中  $H_i(s) = c_i + \frac{d_i}{s - p_i}$ 。此时, 我们可以令子系统  $H_i(s)$  的输出为  $y_i(t)$ , 则其输入为  $y_{i-1}(t)$ 。当然,  $y_0(t) = e(t)$  和  $y_n(t) = r(t)$ 。我们可以对每个子系统列出状态方程和输出方程, 即

$$\begin{cases} x'_i(t) = p_i x_i(t) + d_i y_{i-1}(t) \\ y_i(t) = x_i(t) + c_i y_{i-1}(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.11)$$

从中消去中间变量  $\{y_i(t) | i = 1, 2, \dots, n-1\}$  后, 就得到所需的状态方程和输出方程。下面以一例说明之。

**例 6.2** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \left(1 + \frac{1}{s+3}\right)$ , 列写系统状态方程和输出方程。

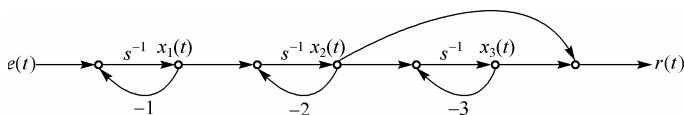


图 6.5 例 6.2 的信号流图

**解** 由例 4.31 可知, 其信号流图如图 6.5 所示。由式 (6.11) 可知

$$\begin{cases} x'_1(t) = -x_1(t) + y_0(t) = -x_1(t) + e(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_2(t) = -2x_2(t) + y_1(t) = -2x_2(t) + x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x'_3(t) = -3x_3(t) + y_2(t) = -3x_3(t) + x_2(t) \\ r(t) = y_3(t) = x_3(t) + y_2(t) = x_3(t) + x_2(t) \end{cases}$$

写成矩阵矢量形式后, 有状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{X}(t) \end{cases}$$

注意, 通过消元, 矩阵  $\mathbf{A}$  一定是一个下三角阵。

## 3. 并联型结构

在无重极点的情况下, 通过部分分式分解可以把系统函数分解为低阶子系统的并联, 即  $H(s) = b_0 + \sum_i H_i(s)$ , 其中  $H_i(s) = \frac{k_i}{s - p_i}$ 。此时, 我们可选取子系统  $H_i(s)$  的输出为状态变量  $x_i(t)$ , 则有系统状态方程  $x'_i(t) = p_i x_i(t) + k_i e(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 和输出方程  $r(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)$ , 以矩阵矢量形式书写后, 有

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \mathbf{X}(t) \end{cases} \quad (6.12)$$

注意, 矩阵  $\mathbf{A}$  一定是一个对角阵, 各状态变量之间互相解耦。

**例 6.3** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}$ , 列写以并联结构实现的系统的状态方程和输出方程。

**解** 由部分分式分解可得

$$H(s) = \frac{1.5}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{0.5}{s+3}$$

其信号流图如图 6.6 所示。于是由式 (6.12) 可知系统状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 0.5 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{X}(t) \end{cases}$$

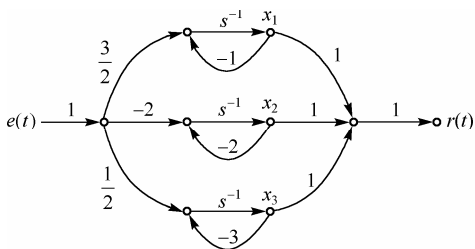


图 6.6 例 6.3 的信号流图

#### 4. 并串型结构

在有重极点的情况下, 通过部分分式分解可以把系统函数分解为低阶子系统的并联, 即

$$H(s) = b_0 + \sum_i H_i(s)$$

其中  $H_i(s)$  为与极点  $p_i$  相应的子系统。对于单极点而言, 有

$$H_i(s) = \frac{k_i}{s - p_i}$$

而对于  $q$  重极点而言, 有

$$H_i(s) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{k_{ij}}{(s - p_i)^{q-j}} \quad (6.13)$$

因此整个系统是子系统的并联, 但其中与重极点相应的子系统可用串联结构实现, 所以

可称这样的实现为并串联型结构。下面,用一典型例来说明如何建立这样的系统的状态方程。

**例6.4** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{s+4}{(s+1)^3(s+2)(s+3)}$ , 列写并串联型实现的系统的状态方程和输出方程。

**解** 由部分分式分解可得

$$H(s) = \frac{\frac{3}{2}}{(s+1)^3} + \frac{-\frac{7}{4}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{15}{8}}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{\frac{1}{8}}{s+3}$$

它有如图 6.7 所示的信号流图。选取积分器输出为状态变量后,可得状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ r(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{8} & -2 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) \end{cases}$$

注意,此时矩阵  $\mathbf{A}$  一定是一个约当阵。

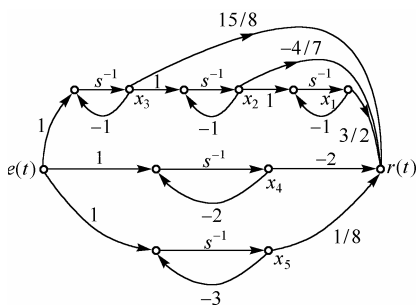


图 6.7 例 6.4 的信号流图

## 6.3 连续时间系统状态方程的求解

### 6.3.1 时域法——矢量微分方程求解

#### 1. 状态转移矩阵 $\Phi(t) \square e^{At}$

##### (1) 定义

对于  $k \times k$  阶可逆矩阵  $\mathbf{A}$ , 矩阵指数(状态转移矩阵)定义为

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k \quad (6.14)$$



## (2) 性质

由此定义出发, 可以证明, 它有如下性质:

$$\text{性质 1} \quad \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1) \quad (6.15)$$

$$\text{性质 2} \quad [\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t) \quad (6.16)$$

推论 1 取  $t_1 = -t_2$ , 并利用性质 1 和性质 2 后, 有

$$\Phi(0) = I \quad (6.17)$$

$$\text{推论 2} \quad [\Phi(t)]^n = \Phi(nt) \quad (6.18)$$

$$\text{推论 3} \quad \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1) \quad (6.19)$$

$$\text{性质 3} \quad \frac{d}{dt}[\Phi(t)] = A\Phi(t) = \Phi(t)A \quad (6.20)$$

$$\text{推论 4} \quad A = \Phi'(0) \quad (6.21)$$

推论 4 可用于从  $\Phi(t)$  计算矩阵  $A$ 。

$$\text{例 6.5} \quad \text{已知 } \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} - te^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{bmatrix}, \text{ 求矩阵 } A。$$

$$\text{解} \quad \Phi'(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & -e^{2t} - 2te^{2t} \\ e^{2t} + 2te^{2t} & 3e^{2t} + 2te^{2t} \end{bmatrix}$$

所以由推论 4, 有

$$A = \Phi'(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{推论 5} \quad \frac{d}{dt}[\Phi(-t)X(t)] = \Phi(-t)X'(t) - \Phi(-t)AX(t) \quad (6.22)$$

## (3) 物理意义

状态转移矩阵是零输入条件下, 系统状态从 0 时刻向  $t$  时刻转移时的状态加权矩阵, 即当激励  $e(t) = 0$  时,

$$X(t) = \Phi(t)X(0) = e^{At}X(0) \quad t > 0 \quad (6.23)$$

这由下面的式 (6.32) 取  $e(t) = 0$  的特例给出。

从状态转移矩阵的物理意义, 不难理解这些性质和推论的物理含义。

性质 4 状态转移矩阵的拉普拉斯变换是  $(sI - A)^{-1}$ , 即

$$\Phi(t)u(t) \xrightarrow{\text{LT}} (sI - A)^{-1} \quad (6.24)$$

性质 5 凯莱-哈密顿 (Cayley-Hamilton) 定理: 对于  $k \times k$  阶矩阵  $A$ , 有

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i t^i \quad (6.25)$$

它可用于从矩阵  $\mathbf{A}$  计算  $\Phi(t)$ ，下面仅讨论矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值各不相同的情况。

**推论 6** 对于有各不相同特征值  $\{\lambda_i | i=1, 2, \dots, k\}$  的  $k \times k$  阶可逆矩阵  $\mathbf{A}$ ，有

$$\mathbf{e}^{\lambda_j t} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \lambda_j^i t^i \quad j=1, 2, \dots, k \quad (6.26)$$

这是由于可逆矩阵  $\mathbf{A}$  相似于特征阵  $\mathbf{\Lambda}$ ，这样再用特征阵  $\mathbf{\Lambda}$  取代矩阵  $\mathbf{A}$  后，式(6.25)仍然成立，考虑到特征阵  $\mathbf{\Lambda}$  是一个对角阵，推论 6 成立。

从矩阵  $\mathbf{A}$  计算  $\Phi(t)$  的步骤是：首先用代数方程  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$  计算矩阵  $\mathbf{A}$  的各特征值；然后用式(6.26)求解加权系数  $\{\alpha_i | i=1, 2, \dots, k\}$ （注意，它们是时间  $t$  的函数）；最后代入式(6.25)计算  $\Phi(t)$ 。

**例 6.6** 已知  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ，求状态转移矩阵  $\Phi(t)$ 。

**解**  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

求得特征值为  $\lambda_1 = -1$  和  $\lambda_2 = -2$

于是由式(6.26)，有 
$$\begin{cases} \mathbf{e}^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 \\ \mathbf{e}^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases}$$

得 
$$\begin{cases} \alpha_0 = 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ \alpha_1 = \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \end{cases}$$

最后把它们代入式(6.25)，有

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -2\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & -2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \\ \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2. 状态方程求解的时域法

### (1) 矢量信号的卷积表示

矢量信号  $\mathbf{f}(t)$  可以表示为

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{I} \delta(t) * \mathbf{f}(t) \quad (6.27)$$

它是标量信号卷积表示  $x(t) = \delta(t) * x(t)$  的推广。

### (2) 因果微分定理应用于状态方程

把因果微分定理应用于式(6.7)，可得规范化矢量系统为

$$[\mathbf{X}_+(t)]' - \mathbf{A} \mathbf{X}_+(t) = \mathbf{e}_x(t) \quad (6.28)$$

式中, 等效激励

$$\mathbf{e}_X(t) = \underbrace{\mathbf{X}(0_-)\delta(t)}_{\mathbf{e}_{X,zi}(t)} + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{e}(t)\mathbf{u}(t)}_{\mathbf{e}_{X,zs}(t)} \quad (6.29)$$

容易验证, 规范化矢量系统的冲激响应为

$$\mathbf{h}_X(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t) \quad (6.30)$$

它是规范化矢量系统对  $\mathbf{e}_X(t) = \mathbf{I}\delta(t)$  的响应。这是因为当  $\mathbf{h}_X(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t)$  时, 有  $\mathbf{h}'_X(t) - \mathbf{A}\mathbf{h}_X(t) = \mathbf{I}\delta(t) = \mathbf{e}_X(t)$ , 其中已利用了式 (6.20) 和式 (6.17)。

式 (6.30) 表明, 状态转移矩阵就是状态方程对应的规范化矢量系统的冲激响应。

把式 (6.29) 代入式 (6.28), 就得到因果微分定理的状态方程表示式:

$$[\mathbf{X}_+(t)]' - \mathbf{X}(0_-)\delta(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}_+(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)$$

(3) 等效激励法应用于状态方程

由式 (6.29) 和系统的 LTI 性可知, 规范化矢量系统[参见式 (6.28)]的响应为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{h}_X(t) * \mathbf{e}_X(t) \quad (6.31)$$

把式 (6.29) 和式 (6.30) 代入式 (6.31), 有

$$\mathbf{X}(t) = \underbrace{\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{X}(0_-)}_{\mathbf{X}_{zi}(t)} + \underbrace{[\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{B}] * [\mathbf{e}(t)\mathbf{u}(t)]}_{\mathbf{X}_{zs}(t)} \quad (6.32)$$

可见,  $\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{B}$  就是状态方程的冲激响应。把式 (6.32) 代入系统输出方程后, 可得系统全响应为

$$\mathbf{r}(t) = \underbrace{\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{X}(0_-)}_{\mathbf{r}_{zi}(t)} + \underbrace{[\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)] * [\mathbf{e}(t)\mathbf{u}(t)]}_{\mathbf{r}_{zs}(t)} \quad (6.33)$$

由于系统零状态响应可以表示为

$$\mathbf{r}_{zs}(t) = \mathbf{h}(t) * [\mathbf{e}(t)\mathbf{u}(t)] \quad (6.34)$$

与式 (6.33) 比较后可知, 系统冲激响应为

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \quad (6.35)$$

状态方程的时域求解法的步骤是: 首先, 计算系统的状态转移矩阵; 然后, 由式 (6.32) 计算系统的状态矢量; 最后, 把得到的状态矢量代入输出方程, 计算系统的输出矢量。

(4) 矢量系统冲激响应的物理意义

矢量系统的冲激响应  $\mathbf{h}(t)$  被定义为系统在零初始状态条件下对  $\mathbf{I}\delta(t)$  的响应, 它是矢量激励的每个分量依次取  $\delta(t)$  (同时其他分量为零) 时组成的矢量轮流激励矢量系统时得到的系统零状态响应矢量集合构成的矩阵。

### 6.3.2 状态方程求解的s域法

分别取式 (6.32)、式 (6.33) 和式 (6.35) 的拉普拉斯变换后, 用上波浪号表示  $s$  域的矢量或矩阵, 有

$$s\text{域状态矢量} \quad \tilde{\mathbf{X}}(s) = \tilde{\Phi}(s)\mathbf{X}(0_-) + \tilde{\Phi}(s)\mathbf{B}\tilde{\mathbf{e}}(s) \quad (6.36)$$

$$s \text{ 域输出矢量} \quad \tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{C}\tilde{\Phi}(s)\mathbf{X}(0_-) + \tilde{\mathbf{h}}(s)\tilde{\mathbf{e}}(s) \quad (6.37)$$

$$\text{其中, 系统函数} \quad \tilde{\mathbf{h}}(s) = \mathbf{C}\tilde{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (6.38)$$

由式(6.24)可知,  $s$  域状态转移矩阵为

$$\tilde{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (6.39)$$

于是状态方程的  $s$  域求解法的步骤是: 首先, 由式(6.39)和式(6.38)分别计算系统的  $s$  域状态转移矩阵和  $s$  域系统函数; 然后, 由式(6.36)和式(6.37)计算系统的  $s$  域状态矢量和  $s$  域输出矢量; 最后, 经拉普拉斯逆变换后, 得到所需状态方程的解。

当然, 可以使用  $s$  域法求解状态转移矩阵、系统冲激响应或系统函数。它们是上述过程的简化。

实际上, 取式(6.7)和式(6.8)的拉普拉斯变换后, 就得到  $s$  域状态方程

$$s\tilde{\mathbf{X}}(s) - \mathbf{X}(0_-) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{e}}(s) \quad (6.40)$$

$$\text{和 } s \text{ 域输出方程} \quad \tilde{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{e}}(s) \quad (6.41)$$

从它们出发, 使用代数计算, 很易得到式(6.36)~式(6.39), 对它们进行拉普拉斯逆变换后, 就可得到式(6.32)~(6.35)。

### 6.3.3 状态方程求解例示

**例 6.7** 在图 6.8 所示电路中, 已知  $e(t) = u(t)$ , 系统初始状态为零。试建立状态方程, 并分别用时域法和  $s$  域法求解状态变量。

**解** (1) 建立状态方程

选择状态变量为

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

列写电路方程, 有

$$\begin{cases} u(t) - x_1(t) = x_2(t) + x_1'(t) \\ x_1(t) = x_2(t) + x_2'(t) \end{cases}$$

可得系统状态方程为

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

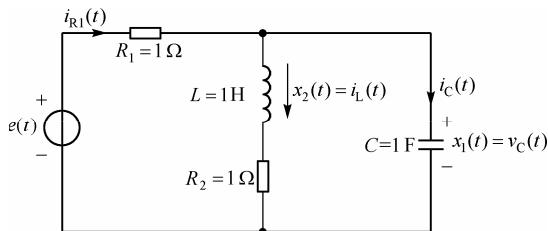


图 6.8 例 6.7 的电路

(2) 时域法求解

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1 + j)(\lambda + 1 - j) = 0$$

可得特征值为

$$\lambda_1 = -1 - j \quad \text{和} \quad \lambda_2 = -1 + j$$

于是由式(6.26), 有

$$\begin{cases} e^{-(1+j)t} = \alpha_0 - (1+j)\alpha_1 \\ e^{-(1-j)t} = \alpha_0 - (1-j)\alpha_1 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} \alpha_0 = e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ \alpha_1 = e^{-t} \sin t \end{cases}$$

把它们代入式(6.25)后, 有

$$\Phi(t) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$$

得到状态转移矩阵后, 考虑到零初始状态, 由式(6.32)有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \Phi(t) \mathbf{B} * \mathbf{e}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} \cos \tau & -e^{-\tau} \sin \tau \\ e^{-\tau} \sin \tau & e^{-\tau} \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau \\ \int_0^t e^{-\tau} \sin \tau d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-t}(\sin t - \cos t)) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-t}(\sin t + \cos t)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3)  $s$  域法求解

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对其进行拉普拉斯逆变换后, 有

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}$$

把  $\tilde{\Phi}(s)$  代入式(6.36), 并考虑到零初始状态后, 可得  $s$  域状态矢量为

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = \tilde{\Phi}(s) \mathbf{B} \tilde{\mathbf{e}}(s) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \frac{1}{s((s+1)^2 + 1)} \begin{bmatrix} s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对其进行拉普拉斯逆变换后, 就得到系统状态矢量

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-t}(\sin t - \cos t)) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-t}(\sin t + \cos t)) \end{bmatrix}$$

时域法和  $s$  域法给出了相同的状态转移矩阵和状态变量解。显然,  $s$  域法要简便得多。

## 6.4 离散时间系统状态方程的建立

### 6.4.1 离散时间系统状态方程的一般形式

一个  $m$  维输入、 $l$  维输出的动态离散时间系统可一般地表示为矢量一阶非线性时变差分方程:

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{X}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) \quad (6.42)$$

$$\text{输出方程} \quad \mathbf{r}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) \quad (6.43)$$

式中,

$$\mathbf{X}(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \cdots \quad x_k(n)]^T$$

$$\mathbf{e}(n) = [e_1(n) \quad e_2(n) \quad \cdots \quad e_m(n)]^T$$

$$\mathbf{r}(n) = [r_1(n) \quad r_2(n) \quad \cdots \quad r_l(n)]^T$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) = [f_1(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) \quad f_2(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) \quad \cdots \quad f_k(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n)]^T$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) = [g_1(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) \quad g_2(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n) \quad \cdots \quad g_l(\mathbf{X}(n), \mathbf{e}(n), n)]^T$$

对于线性时不变离散时间系统的特殊情况, 有

$$\text{状态方程} \quad \mathbf{X}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(n) + \mathbf{B}\mathbf{e}(n) \quad (6.44)$$

$$\text{输出方程} \quad \mathbf{r}(n) = \mathbf{C}\mathbf{X}(n) + \mathbf{D}\mathbf{e}(n) \quad (6.45)$$

式中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{lk} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l1} & d_{l2} & \cdots & d_{lm} \end{bmatrix}$$

由状态方程式(6.44)和输出方程式(6.45)描述的系统可得图 6.9 所示的系统实现框图, 其中矢量延迟器的输入为  $\mathbf{X}(n+1)$ , 输出为  $\mathbf{X}(n)$ 。

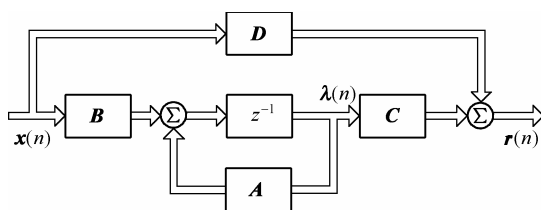


图 6.9 离散系统状态变量实现框图

### 6.4.2 由系统输入-输出方程(或系统函数)或实现框图(或信号流图)建立状态方程

#### 1. 直接型结构

系统函数为有理函数

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_{N-1} z + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N}$$

的 LTI 离散系统有差分方程

$$\sum_{i=0}^N a_i r(n-i) = \sum_{i=0}^N b_i e(n-i)$$

式中,  $a_0 \triangleq 1$ 。系统函数可重写为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{N-1} z^{-(N-1)} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}} \quad (6.46)$$

于是有图 6.10 所示的最简实现的直接型结构实现框图或图 6.11 所示的信号流图。

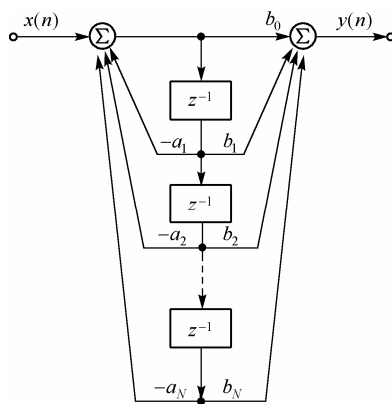


图 6.10 离散系统直接型实现

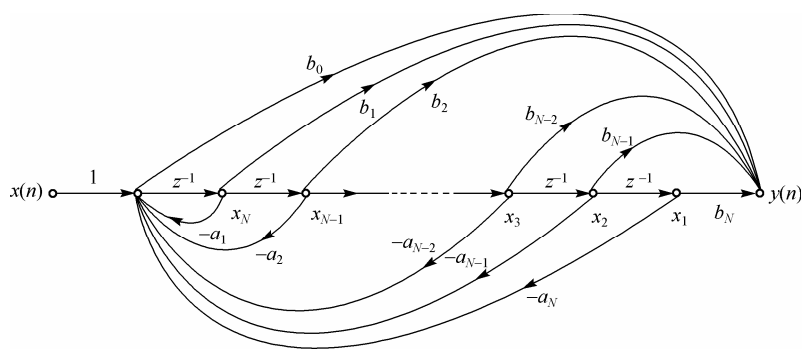


图 6.11 直接型结构实现的信号流图

在由离散系统的输入-输出方程(或系统函数)或实现框图(或信号流图)建立状态方程时,我们选取最简实现中每个延迟器的输出为状态变量,则有

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_3(n) \\ \vdots \\ x_{N-1}(n+1) = x_N(n) \\ x_N(n+1) = e(n) - \sum_{i=1}^N a_i x_{N+1-i}(n) \end{cases} \quad (6.47)$$

$$r(n) = b_0 x_N(n+1) + \sum_{i=1}^N b_i x_{N+1-i}(n) = b_0 e(n) + \sum_{i=1}^N (b_i - b_0 a_i) x_{N+1-i}(n)$$

写成矩阵矢量形式后,可得系统状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(n) \\ r(n) = [b_N - b_0 a_N \quad b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \quad \cdots \quad b_2 - b_0 a_2 \quad b_1 - b_0 a_1] \mathbf{X}(n) + b_0 e(n) \end{cases} \quad (6.48)$$

## 2. 串联型结构

通过部分分式分解和零极点配对,可把系统函数分解为低阶子系统的串联,即  $H(z) = \prod_i H_i(z)$ , 其中  $H_i(z) = c_i + \frac{d_i}{z - p_i}$ 。此时,我们可以令子系统  $H_i(z)$  的输出为  $y_i(n)$ , 则其输入为  $y_{i-1}(n)$ 。当然,  $y_0(n) = e(n)$  和  $y_N(n) = r(n)$ 。我们可以对每个子系统列出状态方程和输出方程

$$\begin{cases} x_i(n+1) = p_i x_i(n) + d_i y_{i-1}(n) \\ y_i(n) = x_i(n) + c_i y_{i-1}(n) \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, N \quad (6.49)$$

式(6.49)所示子系统可用图 6.12 所示的流图实现。从  $N$  个式中,消去中间变量  $\{y_i(n) | i = 1,$



$2, \dots, N-1\}$  后, 就得到所需的状态方程和输出方程。下面以一例说明之。

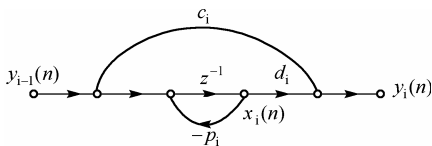


图 6.12 子系统  $H_i(z)$  的流图

**例6.8** 已知系统函数为  $H(z) = \frac{z+2}{z+1} \cdot \frac{z+1.5}{z+0.5} \cdot \frac{z+1.25}{z+0.25}$ , 列写串联实现的系统的状态方程和输出方程。

**解** 由式(6.49)可知

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) + y_0(n) = -x_1(n) + e(n) \\ y_1(n) = x_1(n) + y_0(n) = x_1(n) + e(n) \\ x_2(n+1) = -0.5x_2(n) + y_1(n) = -0.5x_2(n) + x_1(n) + e(n) \\ y_2(n) = x_2(n) + y_1(n) = x_2(n) + x_1(n) + e(n) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x_3(n+1) = -0.25x_3(n) + y_2(n) = -0.25x_3(n) + x_2(n) + x_1(n) + e(n) \\ r(n) = y_3(n) = x_3(n) + y_2(n) = x_3(n) + x_2(n) + x_1(n) + e(n) \end{cases}$$

写成矩阵矢量形式后, 可得状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & -0.25 \end{bmatrix} \mathbf{X}(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(n) \\ r(n) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{X}(n) + e(n) \end{cases}$$

其信号流图如图 6.13 所示。注意, 通过消元, 矩阵  $\mathbf{A}$  一定是一个下三角阵。

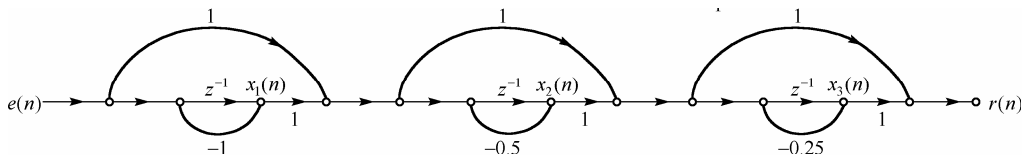


图 6.13 例 6.8 的信号流图

## 2. 并联型结构

在无重极点的情况下, 通过部分分式分解, 可把系统函数分解为低阶子系统的并联, 即

$$H(z) = b_0 + \sum_i H_i(z)$$

式中,

$$H_i(z) = \frac{k_i}{z - p_i} \quad (6.50)$$

此时, 我们可以选取子系统  $H_i(z)$  的输出为状态变量  $x_i(n)$ , 则有系统状态方程

$$x_i(n+1) = p_i x_i(n) + k_i e(n) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (6.51)$$

和输出方程

$$r(n) = b_0 e(n) + \sum_{i=1}^k x_i(n) \quad (6.52)$$

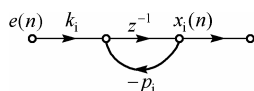


图 6.14 式 (6.51) 的信号流图

式 (6.51) 所示的子系统可用图 6.14 所示的信号流图实现。

以矩阵矢量形式书写式 (6.51) 和式 (6.52) 后, 有

$$\begin{cases} \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_k \end{bmatrix} \mathbf{X}(n) + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_k \end{bmatrix} e(n) \\ r(n) = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \mathbf{X}(n) + b_0 e(n) \end{cases} \quad (6.53)$$

注意, 矩阵  $\mathbf{A}$  一定是一个对角阵, 各状态变量之间互相解耦。

**例6.9** 已知系统函数为  $H(z) = \frac{z+2}{z+1} \cdot \frac{z+1.5}{z+0.5} \cdot \frac{z+1.25}{z+0.25}$ , 列写以并联结构实现的系统的状态方程和输出方程。

**解** 由部分分式分解可知

$$H(z) = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{-9}{z+0.5} + \frac{\frac{35}{3}}{z+0.25}$$

其信号流图如图 6.15 所示。

于是由式 (6.53) 可知, 系统状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \mathbf{X}(n) + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -9 \\ \frac{35}{3} \end{bmatrix} e(n) \\ r(n) = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{X}(n) + e(n) \end{cases}$$

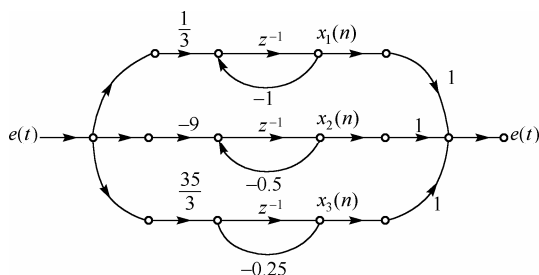


图 6.15 例 6.9 的信号流图

#### 4. 并串联型结构

在有重极点的情况下, 通过部分分式分解, 可把系统函数分解为低阶子系统的并联, 即

$$H(z) = b_0 + \sum_i H_i(z)$$

式中,  $H_i(z)$  为与极点  $p_i$  相应的子系统。对于单极点而言, 有

$$H_i(z) = \frac{k_i}{z - p_i}$$

而对于  $q$  重极点而言, 有

$$H_i(z) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{k_{ij}}{(z - p_i)^{q-j}}$$

因此整个系统是子系统的并联, 但其中与重极点相应的子系统用串联结构实现, 所以可称这样的实现为并串联型结构。下面, 用一典型例来说明如何建立这样的系统的状态方程。

**例 6.10** 已知系统函数为  $H(z) = \frac{z+1.5}{(z+1)^3(z+0.5)}$ , 列写并串联型实现的系统的状态方程和输出方程。

**解** 由部分分式分解可知

$$H(z) = \frac{-1}{(z+1)^3} + \frac{-4}{(z+1)^2} + \frac{-8}{z+1} + \frac{8}{z+0.5}$$

它有如图 6.16 所示的并串联结构。

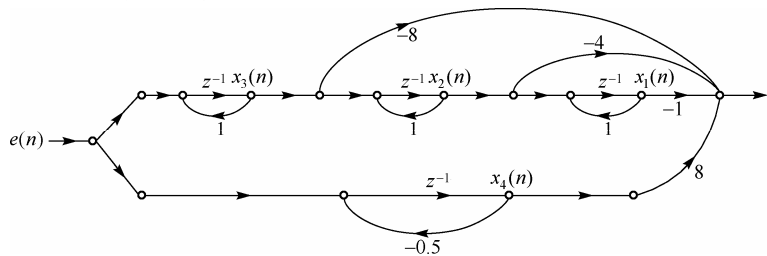


图 6.16 例 6.10 的信号流程图

选取延迟器输出为状态变量后, 有状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \mathbf{X}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(n) \\ r(n) = [-1 \quad -4 \quad -8 \quad 8] \mathbf{X}(n) \end{cases}$$

注意, 此时矩阵  $\mathbf{A}$  一定是一个约当阵。

## 6.5 离散时间系统状态方程的求解

### 6.5.1 时域法——矢量差分方程求解

#### 1. 状态转移矩阵

$$\Phi(n) \triangleq A^n \quad (6.54)$$

它有与连续系统状态转移矩阵  $\Phi(t)$  相似的含义和性质。

##### (1) 性质

可以证明，它有如下性质：

$$\text{性质 1} \quad \Phi(n+m) = \Phi(n)\Phi(m) = \Phi(m)\Phi(n) \quad (6.55)$$

$$\text{性质 2} \quad [\Phi(n)]^{-1} = \Phi(-n) \quad (6.56)$$

推论 1 取  $m = -n$ ，并利用性质 1 和性质 2 后，有

$$\Phi(0) = I \quad (6.57)$$

$$\text{推论 2} \quad [\Phi(m)]^n = \Phi(nm) \quad (6.58)$$

$$\text{推论 3} \quad \Phi(n-m) = \Phi(n-l)\Phi(l-m) = \Phi(l-m)\Phi(n-l) \quad (6.59)$$

##### (2) 物理意义

状态转移矩阵是零输入条件下，系统状态从 0 时刻向  $n$  时刻转移时的状态加权矩阵，即当激励  $e(n) = 0$  时，有

$$X(n) = \Phi(n)X(0) = A^n X(0) \quad n > 0 \quad (6.60)$$

这由下面的式 (6.70) 取  $e(n) = 0$  的特例给出。

从状态转移矩阵的物理意义，不难理解这些性质和推论的物理含义。

**性质 3** 状态转移矩阵的  $z$  变换是  $(I - z^{-1}A)^{-1}$ ，即

$$\Phi(n) \xleftrightarrow{zT} (I - z^{-1}A)^{-1} \quad (6.61)$$

它可用于以  $z$  变换法计算  $\Phi(n)$ 。

**性质 4** 凯莱-哈密顿定理

对于  $k \times k$  阶矩阵  $A$ ，有

$$\Phi(n) = A^n = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i \quad (6.62)$$

它也可用于从矩阵  $A$  计算  $\Phi(n)$ ，下面仅讨论矩阵  $A$  的特征值各不相同的情况。

**推论 4** 对于有各不相同特征值  $\{\lambda_i | i = 1, 2, \dots, k\}$  的  $k \times k$  阶矩阵  $A$ ，有

$$\lambda_j^n = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \lambda_j^i \quad j=1, 2, \dots, k \quad (6.63)$$

这是由于矩阵  $\mathbf{A}$  相似于特征阵  $\mathbf{\Lambda}$ ，这样在用特征阵  $\mathbf{\Lambda}$  取代矩阵  $\mathbf{A}$  后，式(6.62)仍然成立，考虑到特征阵  $\mathbf{\Lambda}$  是一个对角阵，推论4成立。

从矩阵  $\mathbf{A}$  计算  $\Phi(n)$  的步骤是：首先用代数方程  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$  计算矩阵  $\mathbf{A}$  的各特征值；然后用式(6.63)求解加权系数  $\{\alpha_i | i=1, 2, \dots, k\}$  (注意，它们是离散时间  $n$  的函数)；最后代入式(6.62)计算  $\Phi(n)$ 。

**例 6.11** 已知  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ，求状态转移矩阵  $\Phi(n)$ 。

**解**  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

可得特征值为  $\lambda_1 = -1$  和  $\lambda_2 = -2$

于是由式(6.63)，有

$$\begin{cases} (-1)^n = \alpha_0 - \alpha_1 \\ (-2)^n = \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{cases}$$

则  $\begin{cases} \alpha_0 = 2(-1)^n - (-2)^n \\ \alpha_1 = (-1)^n - (-2)^n \end{cases}$

最后把它代入式(6.62)，有

$$\Phi(n) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -2\alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^n - (-2)^n & -2((-1)^n - (-2)^n) \\ (-1)^n - (-2)^n & -(-1)^n + 2(-2)^n \end{bmatrix}$$

## 2. 状态方程求解的时域法

### (1) 离散矢量信号的卷积和表示

离散矢量信号  $\mathbf{f}(n)$  可以表示为

$$\mathbf{f}(n) = \mathbf{I} \delta(n) * \mathbf{f}(n) \quad (6.64)$$

它是标量信号卷积和表示  $x(n) = \delta(n) * x(n)$  的推广。

### (2) 矢量序列的因果移序

$$\mathbf{X}(n+1)\mathbf{u}(n) = \mathbf{X}(n+1)\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{X}(0)\delta(n+1) \quad (6.65)$$

它表明矢量序列移序后因果化与因果化后移序两种运算得到的序列之差。把它运用于状态方程式(6.44)后，可得规范化矢量系统

$$\mathbf{X}(n+1)\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{A}\mathbf{X}(n)\mathbf{u}(n) = \mathbf{e}_x(n) \quad (6.66)$$

式中，等效激励

$$\mathbf{e}_x(n) = \underbrace{\mathbf{X}(0)\delta(n+1)}_{\mathbf{e}_{x,zl}(n)} + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{e}(n)\mathbf{u}(n)}_{\mathbf{e}_{x,zs}(n)} \quad (6.67)$$

容易验证, 规范化矢量系统的冲激响应为

$$\mathbf{h}_X(n) = \Phi(n-1)\mathbf{u}(n-1) \quad (6.68)$$

它是规范化矢量系统对  $\mathbf{e}_X(n) = \mathbf{I}\delta(n)$  的响应。这是因为当  $\mathbf{h}_X(n) = \Phi(n-1)\mathbf{u}(n-1)$  时, 有  $\mathbf{h}_X(n+1) - \mathbf{A}\mathbf{h}_X(n) = \mathbf{I}\delta(n) = \mathbf{e}_X(n)$ , 其中已利用了式 (6.54) 和式 (6.57)。

式 (6.68) 表明, 状态转移矩阵就是状态方程对应的规范化矢量系统的冲激响应。

### (3) 等效激励法应用于状态方程

由式 (6.64) 和系统的 LTI 性质可知, 规范化矢量系统[参见式 (6.66)]的响应为

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{h}_X(n) * \mathbf{e}_X(n) \quad (6.69)$$

把式 (6.67) 和式 (6.68) 代入式 (6.69), 有

$$\mathbf{X}(n) = \Phi(n)\mathbf{X}(0)\mathbf{u}(n) + [\Phi(n-1)\mathbf{u}(n-1)\mathbf{B}] * \mathbf{e}(n) \quad (6.70)$$

由式 (6.70) 可见,  $\Phi(n-1)\mathbf{u}(n-1)\mathbf{B}$  就是状态方程的冲激响应。把式 (6.70) 代入系统的输出方程, 可知系统的全响应为

$$\mathbf{r}(n) = \underbrace{\mathbf{C}\Phi(n)\mathbf{u}(n)\mathbf{X}(0)}_{\text{零输入解}} + \underbrace{[\mathbf{C}\Phi(n-1)\mathbf{u}(n-1)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(n)] * \mathbf{e}(n)}_{\text{零状态解}} \quad (6.71)$$

这意味着系统的冲激响应函数为

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{C}\Phi(n-1)\mathbf{u}(n-1)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(n) \quad (6.72)$$

状态方程的时域求解法的步骤是: 首先, 计算系统的状态转移矩阵和系统冲激响应函数; 然后, 由式 (6.70) 和式 (6.71) 计算系统的状态矢量和输出矢量就得到所需状态方程解。

### (4) 矢量离散系统冲激响应的物理意义

矢量离散系统的冲激响应  $\mathbf{h}(n)$  被定义为系统在零初始状态条件下对  $\mathbf{I}\delta(n)$  的响应, 它是矢量激励的每个分量依次取  $\delta(n)$  (同时其他分量为零) 时组成的矢量轮流激励矢量系统时得到的系统零状态响应矢量集合构成的矩阵。

## 6.5.2 状态方程求解的z变换法

分别取式 (6.70) 和式 (6.71) 的  $z$  变换后, 并用上波浪号表示  $z$  域的矢量或矩阵, 有

$$\tilde{\mathbf{X}}(z) = \tilde{\Phi}(z)\mathbf{X}(0) + z^{-1}\tilde{\Phi}(z)\mathbf{B}\tilde{\mathbf{e}}(z) \quad (6.73)$$

$$\text{和 } z \text{ 域输出矢量} \quad \tilde{\mathbf{r}}(z) = \mathbf{C}\tilde{\Phi}(z)\mathbf{X}(0) + \tilde{\mathbf{h}}(z)\tilde{\mathbf{e}}(z) \quad (6.74)$$

$$\text{式中, } z \text{ 域系统函数} \quad \tilde{\mathbf{h}}(z) = z^{-1}\mathbf{C}\tilde{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (6.75)$$

$$\text{和 } z \text{ 域状态转移矩阵} \quad \tilde{\Phi}(z) = (\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A})^{-1} \quad (6.76)$$

这样, 状态方程的  $z$  变换求解法的步骤是: 首先, 由式 (6.76) 和式 (6.75) 计算系统的  $z$  域状态转移矩阵和  $z$  域系统函数; 然后, 由式 (6.73) 和式 (6.74) 计算系统的  $z$  域状态矢量和  $z$  域输出矢量; 最后, 经  $z$  逆变换后, 得到所需状态方程解。

当然, 可以使用  $z$  变换域法求解状态转移矩阵、系统冲激响应或系统函数。它们是上述

过程的简化。

实际上, 取式(6.44)和式(6.45)的 $z$ 变换后, 就得到 $z$ 域状态方程

$$z[\tilde{\mathbf{X}}(z) - \mathbf{X}(0)] = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{e}}(z) \quad (6.77)$$

和 $z$ 域输出方程

$$\tilde{\mathbf{r}}(z) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{e}}(z) \quad (6.78)$$

从它们出发, 使用代数计算, 很容易得到式(6.73)~式(6.76), 对它们进行拉普拉斯逆变换后, 就得到式(6.70)~式(6.72)。

### 6.5.3 例示

**例 6.12** 在图 6.17 所示的离散系统中, 已知 $e_1(n) = \delta(n)$  和 $e_2(n) = u(n)$ , 系统初始状态为零。试建立状态方程, 并分别用时域法和 $z$ 域法求解。

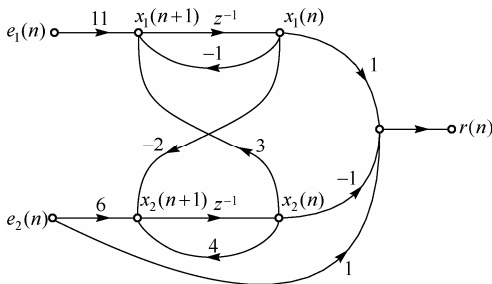


图 6.17 例 6.12 的信号流图

**解** (1) 建立状态方程

如图 6.17 所示, 选择延迟器输出为状态变量, 于是有

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) + 3x_2(n) + 11\delta(n) \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) + 4x_2(n) + 6u(n) \end{cases}$$

$$r(n) = x_1(n) - x_2(n) + u(n)$$

即

$$\begin{cases} \mathbf{X}(n+1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{X}(n) + \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \\ r(n) = [1 \quad -1] \mathbf{X}(n) + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \delta(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \end{cases}$$

(2) 时域法求解

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

求得特征值为

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{和} \quad \lambda_2 = 2$$

于是由式(6.63), 有

$$\begin{cases} 1^n = \alpha_0 + \alpha_1 \\ 2^n = \alpha_0 + 2\alpha_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha_0 = 2 - 2^n \\ \alpha_1 = 2^n - 1 \end{cases}$$

把它们代入式(6.62), 有

$$\Phi(n) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 - 2^{n+1} & -3 + 3 \cdot 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & -2 + 3 \cdot 2^n \end{bmatrix}$$

得到状态转移矩阵后, 考虑到零初始状态, 由式(6.70)有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(n) &= \mathbf{u}(n-1) \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} e(n-1-i) \\ &= \mathbf{u}(n-1) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} 3 - 2^{i+1} & -3 + 3 \cdot 2^i \\ 2 - 2^{i+1} & -2 + 3 \cdot 2^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(n-1-i) \\ \mathbf{u}(n-1-i) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n - 18n + 15 \\ 7 \cdot 2^n - 12n + 4 \end{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) \end{aligned}$$

将其代入系统的输出方程后, 有

$$\begin{aligned} r(n) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n - 18n + 15 \\ 7 \cdot 2^n - 12n + 4 \end{bmatrix} \mathbf{u}(n-1) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(n) \\ \mathbf{u}(n) \end{bmatrix} \\ &= (11 - 6n)\mathbf{u}(n-1) + \mathbf{u}(n) = \delta(n) + 6(2-n)\mathbf{u}(n-1) \end{aligned}$$

(3)  $z$  域法求解

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(z) &= (\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + z^{-1} & -3 \\ 2 & -4 + z^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(1 - z^{-1})(2 - z^{-1})} \begin{bmatrix} -4 + z^{-1} & 3 \\ -2 & 1 + z^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对它进行  $z$  逆变换后, 有

$$\Phi(n) = \begin{bmatrix} 3 - 2^{n+1} & -3 + 3 \cdot 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & -2 + 3 \cdot 2^n \end{bmatrix}$$

把  $\tilde{\Phi}(z)$  代入式(6.73), 并考虑到零初始状态, 可得  $z$  域状态矢量为



$$\begin{aligned}
\tilde{X}(s) &= z^{-1} \tilde{\Phi}(z) B \tilde{e}(z) \\
&= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} \begin{bmatrix} -4+z^{-1} & 3 \\ -2 & 1+z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{1+z^{-1}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{14z^{-1}}{1-2z^{-1}} + \frac{-18z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{15z^{-1}}{1-z^{-1}} \\ \frac{14z^{-1}}{1-2z^{-1}} + \frac{-12z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{4z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

对其进行  $z$  逆变换后, 就得到系统状态矢量

$$X(n) = \begin{bmatrix} 7 \cdot 2^n - 18n + 15 \\ 7 \cdot 2^n - 12n + 4 \end{bmatrix} u(n-1)$$

这与时域法的计算结果完全相同, 把它代入系统的输出方程后, 就得到与时域法完全相同的系统输出。

## 6.6 系统解耦——状态变量的线性变换和 $A$ 矩阵的对角化

### 6.6.1 状态变量的线性变换

#### 1. 定义

对于  $k \times k$  阶可逆矩阵  $P$ , 状态变量的线性变换定义为

$$\hat{X}(t) = PX(t) \quad (6.79)$$

其逆变换为

$$X(t) = P^{-1} \hat{X}(t) \quad (6.80)$$

其中, 我们用上标  $\wedge$  表示变域中的量。

#### 2. 变域状态方程

把状态方程两边左乘变换  $P$ , 并利用式 (6.79) 后, 可知变域状态方程为

$$\begin{cases} \hat{X}(t) = \hat{A} \hat{X}(t) + \hat{B} e(t) \\ r(t) = \hat{C} \hat{X}(t) + \hat{D} e(t) \end{cases} \quad (6.81)$$

式中,

$$\begin{cases} \hat{A} = PAP^{-1} \\ \hat{B} = PB \\ \hat{C} = CP^{-1} \\ \hat{D} = D \end{cases} \quad (6.82)$$

### 3. 线性变换下的系统函数不变性

把式(6.82)代入式(6.38)后, 可得变换后的系统函数

$$\hat{\mathbf{h}}(s) = \hat{\mathbf{C}} \hat{\Phi}(s) \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\tilde{\Phi}(s)\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{B}) + \mathbf{D} = \mathbf{C}\tilde{\Phi}(s)\mathbf{B} + \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{h}}(s) \quad (6.83)$$

其中利用了事实:

$$\hat{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} = (s\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\tilde{\Phi}(s)\mathbf{P}^{-1} \quad (6.84)$$

这表明, 线性变换改变  $s$  域状态转移矩阵, 但不改变系统函数。这意味着, 同一个系统函数可以有无数个系统实现及其相应的状态方程, 任何两个等价的实现由两个状态变量之间的线性变换相互联系。

## 6.6.2 系统解耦—— $\mathbf{A}$ 矩阵的对角化

在一般情况下, 矩阵  $\mathbf{A}$  是一个非对角阵, 使得每个状态变量的演变都会影响其他状态变量的演变, 这样的系统是紧耦合系统, 分析和控制这样的系统并非易事。

为了能良好地分析和控制系统, 需要使系统解耦, 即要使系统的每个状态变量独立地演变, 不受任何其他状态变量的影响。当矩阵  $\mathbf{A}$  可对角化时, 这可以通过  $\mathbf{A}$  矩阵的对角化的过程实现, 也就是要选择线性变换阵  $\mathbf{P}$ , 使变换后的  $\mathbf{A}$  阵为对角阵:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \quad (6.85)$$

式中,  $\{\lambda_i | i=1, 2, \dots, k\}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值。由线性代数的知识可知, 满足此要求的相似变换阵是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征阵, 即  $\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ , 从而使  $\mathbf{A}\mathbf{P}_i = \lambda_i\mathbf{P}_i \quad i=1, 2, \dots, k$ , 其中,  $\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \dots \quad \mathbf{P}_k]$ 。

对角化后的系统状态方程为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}'(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{X}}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{e}(t) \end{cases} \quad (6.86)$$

因此, 解耦后的系统的第  $i$  个状态变量的状态方程为

$$\hat{x}_i'(t) = \lambda_i \hat{x}_i(t) + \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{e}(t) \quad (6.87)$$

显然它与其他状态变量无关。这里规定了  $\hat{\mathbf{B}} = [\hat{\mathbf{B}}_1 \quad \hat{\mathbf{B}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{B}}_k]^T$ , 即行矢量  $\hat{\mathbf{B}}_i^T$  为矩阵  $\hat{\mathbf{B}}$  的第  $i$  行。

**例 6.13** 把图 6.18 所示系统的  $\mathbf{A}$  矩阵对角化, 并画出对角化后的系统。

**解** 显然, 图示系统的状态变量之间是互相耦合的, 其状态方程为

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \mathbf{e}(t)$$

为把  $\mathbf{A}$  矩阵对角化, 首先计算其特征值和特征矢量阵。

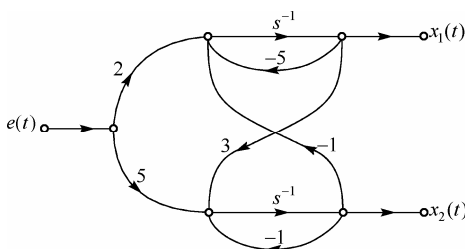


图 6.18 例 6.13 的信号流图

因为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 5 & 1 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$$

所以可得特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

把它代入

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i \quad i = 1, 2 \quad (\text{其中, } \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ p_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2)$$

后, 有

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

于是可得

$$\begin{cases} p_1 = -3 \\ p_2 = -1 \end{cases}$$

因此

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

然后, 计算解耦后的系统的参数阵:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

这样, 可知如图 6.19 所示的解耦后的系统状态方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}(t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix} e(t)$$

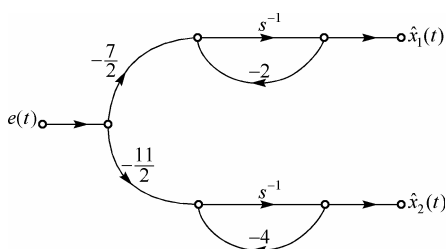


图 6.19 解耦后的信号流图

它是一个由两个独立的状态方程组成的联立方程，即

$$\begin{cases} \hat{x}_1'(t) = -2\hat{x}_1(t) - \frac{7}{2}e(t) \\ \hat{x}_2'(t) = -4\hat{x}_2(t) + \frac{11}{2}e(t) \end{cases}$$

它的状态变量解为

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = e^{-2t} \hat{x}_1(0_-) - \frac{7}{2}e^{-2t} * e(t) \\ \hat{x}_2(t) = e^{-4t} \hat{x}_2(0_-) + \frac{11}{2}e^{-4t} * e(t) \end{cases}$$

其中，初始条件为

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(0_-) \\ \hat{x}_2(0_-) \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{X}(0_-) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -x_1(0_-) - x_2(0_-) \\ 3x_1(0_-) + x_2(0_-) \end{bmatrix}$$

再由它们计算出  $\hat{\mathbf{X}}(t)$  后，可得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \hat{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) \\ -3\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

计算原状态方程的解  $\mathbf{X}(t)$ 。

总之，用对角化技术求解状态方程的步骤是：首先计算对角化矩阵  $\mathbf{A}$  的特征矢量阵  $\mathbf{P}^{-1}$ ；然后把原状态方程的各参数阵/矢量变换成解耦的状态方程的参数阵/矢量，并把原状态矢量的初始条件变换成解耦状态变量的初始条件，并分别求解各解耦状态变量；最后把解耦状态变量逆变换成原状态变量。

### 6.6.3 由 $\mathbf{A}$ 矩阵的特征值判断系统稳定性

把矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式  $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i) = 0$  与系统函数  $\tilde{\mathbf{h}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$  相

比，易知矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $\{\lambda_i | i=1, 2, \dots, k\}$  就是系统的极点。因此，我们可用矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值来判断系统的稳定性。用状态方程描述的系统稳定的充要条件是：矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值的实部小于零，即

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad i=1, 2, \dots, k \quad (6.88)$$

显然, 由于对角化的矩阵  $\mathbf{A}$  的对角元素就是特征值, 因此解耦系统的稳定性判断是十分简单明了的。

**例 6.14** 试问  $K$  满足什么条件, 图 6.20 所示的系统稳定?

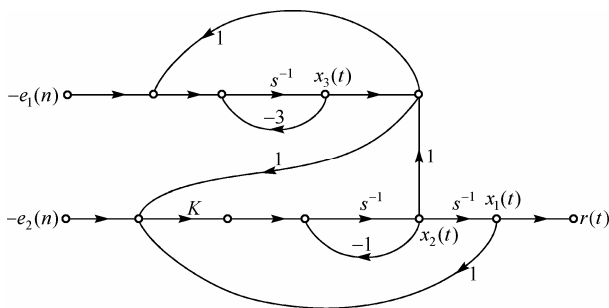


图 6.20 例 6.14 的信号流图

**解** 图 6.20 所示系统的状态方程为

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -K & -1 & -K \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

该系统的特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ K & \lambda + 1 & K \\ 0 & 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda + 4K = 0$$

罗斯-霍尔维茨准则表明, 三阶系统稳定的充要条件是: 其特征多项式  $\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$  的参数全都大于零, 并且  $\alpha\beta > \gamma$ 。

根据此准则, 该系统稳定的充要条件是  $0 < K < 5$ 。

## 本章小结

1. 系统状态是适当选取的一组变量。它在  $0_-$  时的值可提供确定  $t = 0_-$  时系统状态的最必要的信息, 若给定系统输入, 可以得到  $t > 0_-$  时的系统行为。这组变量称为状态变量, 状态矢量是元素为状态变量的矢量。

2. 电网络状态方程的建立: 首先选择电容电压和电感电流作为状态变量, 然后应用 KCL 和 KVL 方程列出适当形式的状态方程。

3. 连续系统的状态方程也可以首先由系统微分方程或系统函数得到其直接型、串联型、并联型或并串型实现的信号流图, 然后依据流图选取积分器输出为状态变量, 建立其状态方程。不同的系统实现会得到不同的状态方程。

4. LTI 连续时间系统可表示为状态方程  $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t)$  和输出方程  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t)$ ; 其时域解为系统状态  $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{X}(0_-) + \Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{B} * \mathbf{e}(t)$ , 其中, 状态转移矩阵  $\Phi(t) \triangleq \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ , 系统全响应  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{X}(0_-) + [\mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{u}(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)] * \mathbf{e}(t)$ 。

5. 用  $\mathbf{A} = \Phi'(0)$  可以从连续系统状态转移矩阵  $\Phi(t)$  计算矩阵  $\mathbf{A}$ 。

6. 常用两种基本方法来确定状态转移矩阵  $\Phi(t)$ 。第一种方法是用  $\tilde{\Phi}(s) = (sI - A)^{-1}$  计算  $s$  域状态转移矩阵  $\tilde{\Phi}(s)$ , 逆变换后得到转移矩阵  $\Phi(t)$ ; 第二种方法是利用凯莱-哈密顿定理求解。

7. 状态方程可以用拉普拉斯变换法求解, 这称为状态方程的频域解。  $s$  域状态方程为  $\tilde{X}(s) = \tilde{\Phi}(s)X(0_-) + \tilde{\Phi}(s)B\tilde{e}(s)$ , 系统函数为  $\tilde{h}(s) = C\tilde{\Phi}(s)B + D$ ,  $s$  域输出方程为  $\tilde{r}(s) = C\tilde{\Phi}(s)X(0_-) + \tilde{h}(s)\tilde{e}(s)$ 。

8. 离散系统的状态方程也可以由系统差分方程或系统函数得到其直接型、串联型、并联型或并串联型实现的信号流图, 然后依据流图选取延迟器输出为状态变量, 建立其状态方程。不同的系统实现会得到不同的状态方程。

9. LTI 离散时间系统可表示为状态方程  $X(n+1) = AX(n) + Be(n)$  和输出方程  $r(n) = CX(n) + De(n)$ ; 其时域解为系统状态  $X(n) = \Phi(n)X(0)u(n) + [\Phi(n)u(n)B] * e(n-1)$ , 系统响应  $r(n) = C\Phi(n)u(n)X(0) + [C\Phi(n-1)u(n-1)B + D\delta(n)] * e(n-1)$ , 其中, 状态转移矩阵  $\Phi(n) \square A^n$ 。

10. 常用两种基本方法来确定状态转移矩阵  $\Phi(n)$ 。第一种方法是用  $\tilde{\Phi}(z) = (I - z^{-1}A)^{-1}$  计算  $z$  域状态转移矩阵  $\tilde{\Phi}(z)$ , 逆变换后得到转移矩阵; 第二种方法是利用凯莱-哈密顿定理求解。

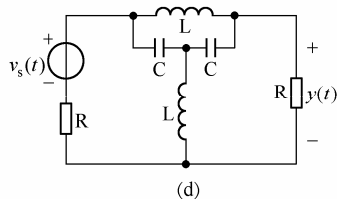
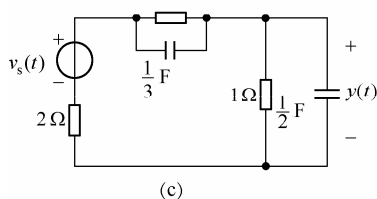
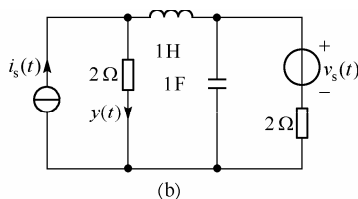
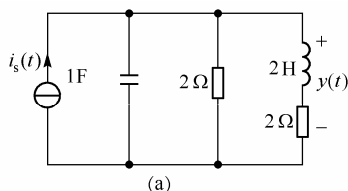
11. 状态方程可以用  $z$  变换法求解, 这称为状态方程的频域解。  $z$  域状态矢量为  $\tilde{X}(z) = \tilde{\Phi}(z)X(0_-) + z^{-1}\tilde{\Phi}(z)B\tilde{e}(z)$ ,  $z$  域系统函数为  $\tilde{h}(z) = z^{-1}C\tilde{\Phi}(z)B + D$ ,  $z$  域输出矢量为  $\tilde{r}(z) = C\tilde{\Phi}(z)X(0_-) + \tilde{h}(z)\tilde{e}(z)$ 。

12. 用对角化技术求解状态方程的步骤是: 首先计算对角化矩阵  $A$  的特征矢量阵  $P^{-1}$ ; 然后把原状态方程的各参数阵/矢量变换成解耦的状态方程的参数阵/矢量, 同时把原状态矢量的初始条件变换成解耦状态变量的初始条件, 并分别求解各解耦状态变量; 最后把解耦状态变量逆变换成原状态变量。

13. 可用矩阵  $A$  的特征值来判断系统的稳定性。用状态方程描述的系统稳定的充要条件是: 矩阵  $A$  的特征值的实部小于零, 即  $\text{Re}(\lambda_i) < 0 (i=1, 2, \dots, k)$ 。

## 习 题

6.1 已知如题图 6.1 所示的各电路, 选择合适的状态变量, 列写系统的状态方程和输出方程。其中  $v_s(t)$  与  $i_s(t)$  是系统的激励信号,  $y(t)$  是系统的响应。



题图 6.1

6.2 给定某 LTI 系统的微分方程表达式如下：

$$a \frac{d^3}{dt^3} y_1(t) + b \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + c \frac{d}{dt} y_1(t) + d y_1(t) = 0$$

选状态变量为

$$\lambda_1(t) = a y_1(t)$$

$$\lambda_2(t) = a \frac{d}{dt} y_1(t) + b y_1(t)$$

$$\lambda_3(t) = a \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) + b \frac{d}{dt} y_1(t) + c y_1(t)$$

输出信号取为

$$y(t) = \frac{d}{dt} y_1(t)$$

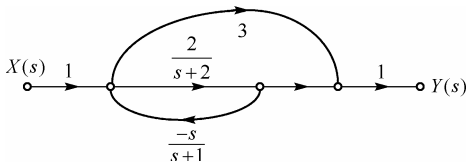
列出该系统的状态方程和输出方程。

6.3 已知系统的系统函数为  $H(s) = \frac{5s+4}{s^3+7s^2+10s}$ ，

(1) 分别画出其并联形式和串联形式的信号流图；

(2) 以积分器的输出为状态变量，列写对应信号流图的状态方程和输出方程。

6.4 已知系统信号流图如题图 6.4 所示，



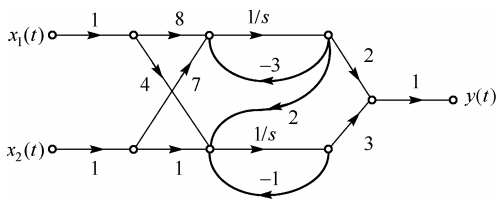
题图 6.4

(1) 试求其系统函数；

(2) 分别画出其并联形式和串联形式的信号流图；

(3) 以积分器的输出为状态变量，列写对应信号流图的状态方程和输出方程。

6.5 给出信号流图如题图 6.5 所示，列出状态方程和输出方程。



题图 6.5

6.6 已知矩阵  $A$  为下列各形式，分别用两种方法求矩阵指数函数  $e^{At}$ 。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6.7 已知线性时不变系统的状态转移矩阵  $\mathbf{e}^{At}$  为下列各形式，求相应的矩阵  $\mathbf{A}$ 。

$$(1) \mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} e^{-at} & te^{-at} \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{e}^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

6.8 已知系统状态方程为  $\dot{\lambda}(t) = \mathbf{A}\lambda(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$ ，其中

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(t) = [\mathbf{u}(t)], \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(t) = [\sin(100t)\mathbf{u}(t)], \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

求状态矢量  $\lambda(t)$ ，并求零输入分量和零状态分量。

6.9 已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

求系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$ 。

6.10 已知某线性时不变系统在零输入条件下有

$$\text{当 } \lambda(0_-) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix};$$

$$\text{当 } \lambda(0_-) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix};$$

求：(1) 状态转移矩阵  $\mathbf{e}^{At}$ ；(2) 确定相应的矩阵  $\mathbf{A}$ 。

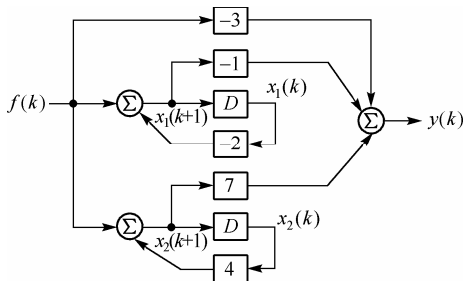
6.11 给定系统的状态方程和初始条件为



$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

用两种方法求解该系统。

6.12 离散系统的时域模拟图如题图 6.12 所示, 以单位延时器的输出信号  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  为状态变量, 列写系统的状态方程与输出方程。



题图 6.12

6.13 已知离散系统的状态方程与输出方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f(k)]$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

系统的初始状态为

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (1) 求状态转移矩阵  $\Phi(k) = A^k$ ;
- (2) 求激励  $f(k) = 0$  时的状态向量  $\mathbf{x}(k)$  和响应向量  $\mathbf{y}(k)$ 。

6.14 已知离散系统的状态方程与输出方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} f(k)$$

$$y(t) = [1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [1]f(k)$$

- (1) 求系统的差分方程;
- (2) 判断系统的稳定性。

6.15 已知线性时不变离散系统状态方程和输出方程分别为

$$\lambda(n+1) = A\lambda(n) + Bx(n)$$

$$y(n) = C\lambda(n) + Dx(n)$$

其中,  $A = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $D = 0$ , 求系统函数  $H(z)$ 。

# 第 7 章 MATLAB在信号与系统中的应用

## 学习要点

本章主要介绍如下内容:

1. MATLAB 简介;
2. 信号的 MATLAB 表示;
3. 利用 MATLAB 进行系统的时域分析;
4. 利用 MATLAB 进行信号的频域分析;
5. 利用 MATLAB 分析系统的频域特性;
6. 利用 MATLAB 进行连续系统的  $s$  域分析;
7. 利用 MATLAB 进行离散系统的  $z$  域分析。

## 7.1 MATLAB简介

本节的主要内容包括:

1. MATLAB 的工作方式;
2. 如何获取帮助;
3. 表达式——变量、数值、算数运算符、关系运算符、逻辑运算符、冒号运算符、数组及其运算;
4. 函数文件;
5. 循环(For, While 循环);
6. 基本绘图语句。

### 7.1.1 MATLAB的工作方式

1. 窗口命令行操作之直接交互工作方式

可以在命令窗口直接输入下列命令, 然后回车。

%绘制抽样函数信号波形:

```
t = -3*pi:pi/100:3*pi;  
ft = sinc(t/pi);  
plot(t,ft);  
xlabel('t');  
ylabel('Sa(t)')
```

2. 使用 MATLAB 编程语言之程序设计方式

工作步骤如下:

步骤 1: “File” → “New” → “M-file”      %打开 MATLAB 程序工作窗 Editor/Debugger;

步骤 2: 编写 MATLAB 程序;

步骤 3: “Tools” → “Run”。

### 7.1.2 获取帮助

命令窗口输入: **help** + 函数名。

例如, **help plot**。

### 7.1.3 表达式——变量

不需要变量的类型说明: 变量名的第一个字符必须是字母; 变量名长度不超过 31 个字符; 大写和小写的字母视为不同的字符。

例如, **num\_students = 25**。

特殊变量: **pi** 表示圆周率; **inf** 表示无穷大; **NaN**(Not a Number) 表示不定量, 如 0/0。

**MATLAB** 用常规的十进制表示数值, 用 **i** 或 **j** 作为后缀来表示复数的虚部。

例如,  $x = 2 + 3j$ , 其中,

<b>abs(x)</b>	求复数 $x$ 的模
<b>angle(x)</b>	求复数 $x$ 的相角(弧度)
<b>real(x)</b>	求复数 $x$ 的实部
<b>imag(x)</b>	求复数 $x$ 的虚部
<b>conj(x)</b>	求复数 $x$ 的共轭

### 7.1.4 表达式——运算符

#### 1. 算术运算符

+	加
-	减
*	乘
/	除
^	乘方
'	矩阵的复共轭转置

#### 2. 逻辑运算符

<b>A &amp; B</b>	逻辑与 (and)
<b>A   B</b>	逻辑或 (or)
<b>~A</b>	逻辑非 (not)

值为 0 时, 表示逻辑假 (F), 其他任何非零值表示逻辑真。

#### 3. 关系运算符

<b>A &lt; B</b>	小于
<b>A &gt; B</b>	大于
<b>A &lt;= B</b>	小于等于
<b>A &gt;= B</b>	大于等于

A==B          等于  
A~=B          不等于

4. 冒号运算符

表达式 1:10 表示产生一个行向量，它的值为

1            2            3            4            5            6            7            8            9            10

表达式 10:-2:1 表示产生一个递减的行向量，它的值为

10          8          6          4          2

5. 数组及其运算

(1) 数组的构造

①用冒号:产生数组。

例如，表达式  $x=2:5$  产生一个数组，它的值为

$$x(1)=2, x(2)=3, x(3)=4, x(4)=5$$

②用 linspace 产生数组。

例如， $x=\text{linspace}(0,2,11)$ 表示将区间[0, 2]上均匀抽样的 11 点作为数组  $x$ 。给 2 维数组赋值时，用分号表示一行的结束，如  $z=[1 \ 2; 3 \ 4]$ 。

③MATLAB 提供了一些产生基本矩阵的函数。

zeros          产生矩阵元素全为 0 的矩阵  
ones          产生矩阵元素全为 1 的矩阵  
rand          产生(0, 1)均匀分布随机数矩阵  
randn          产生正态分布随机数矩阵

(2) 数组的运算

①数组和一个标量相加或相乘。

例如， $y=x-1; z=3*x$ 。

② 2 个数组的对应元素相乘(.\* )或相除 ./ )。

例如， $z=x.*y$ 。

③确定数组大小的函数。

size(A)          返回值数组 A 的行数和列数(二维)  
length(B)          确定数组 B 的元素个数(一维)

7.1.5 函数文件

M 文件的第一行包含 function。

功能：创建一个函数，可以同 MATLAB 的库函数一样使用。

例如，创建一个如下的函数，并保存文件名为 tri.m。

```
function [y] = tri(t)
y = [ abs(t)<=1].*(1-abs(t));
```

再调用函数 tri，并画出它的波形。

```
t=-2:0.05:2;  
plot(t,tri(t));
```

程序运行运行结果如图 7.1。

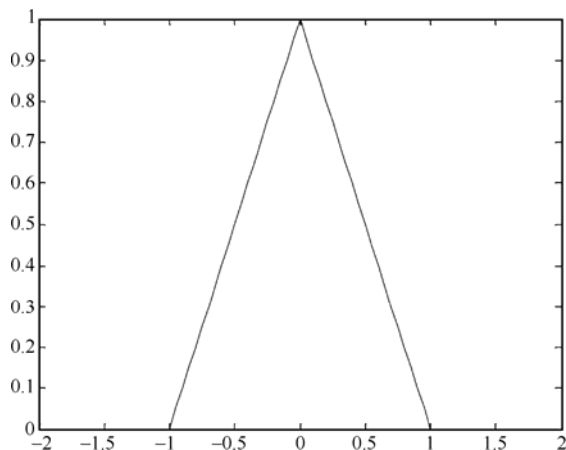


图 7.1 图像窗口显示的波形

### 7.1.6 For循环

例如，编写计算  $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$  的 MATLAB 程序。

MATLAB 程序如下：

```
s=0;  
for n=1:100  
    s=s+n;  
end;
```

### 7.1.7 While 循环

例如，编写计算  $s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$  的值，且要求误差小于  $10^{-6}$  的 MATLAB 程序。

MATLAB 程序如下：

```
s=0;  
n=1;  
eps=1e-6;  
while 1/(n*n)>eps  
    s=s+1/(n*n);  
    n=n+1;  
end  
fprintf('s=%0.5f\n',s)
```

### 7.1.8 plot函数——绘图函数

%矩形脉冲信号：

```
t=0:0.001:4  
T=1
```

```
ft=rectpuls(t-2*T,T)
plot(t,ft)
axis([0,4,-0.5,1.5])
xlabel('t')
ylabel('rectpuls(t)')
```

程序运行结果如图 7.2 所示。

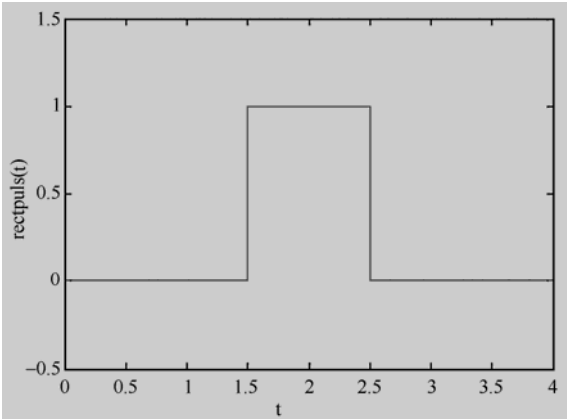


图 7.2 plot 函数绘制的波形图

7.1.9 stem函数——绘图函数

%指数序列：

```
k=0:10;
A=1;
a=-0.6;
fk=A*a.^k;
stem(k,fk);
xlabel('k');
ylabel('exponential')
```

程序运行结果如图 7.3 所示。

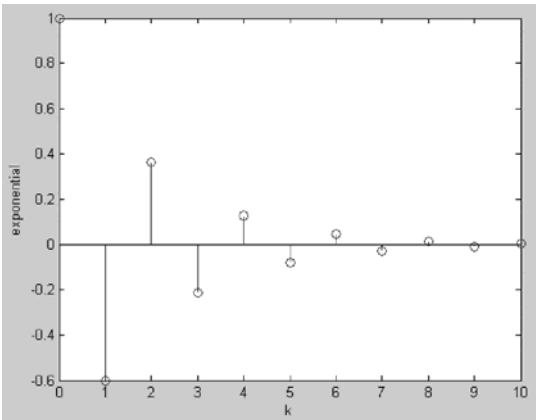


图 7.3 stem 函数绘制的波形图

## 7.2 信号的MATLAB表示

本节的主要内容包括：

1. 基本信号 MATLAB 表示，其中基本信号包括指数信号  $Ae^{at}$ 、指数序列  $a^k$ 、抽样函数  $Sa(t)$ 、正弦型信号、矩形脉冲信号和三角脉冲信号；
2. 信号基本运算的 MATLAB 实现，其中基本运算包括尺度变换、翻转、时移、相加、相乘、差分与求和、微分与积分。

### 7.2.1 基本信号的MATLAB表示

指数信号 $Ae^{at}$	$y = A * \exp(a * t);$
指数序列 $a^k$	幂运算 $a.^k$ 实现
正弦型信号	内部函数 $\cos()$ 和 $\sin()$
抽样函数 $Sa(t)$	$\text{sinc}(t)$
矩形脉冲信号	$y = \text{rectpuls}(t, \text{width})$
三角波脉冲信号	$y = \text{tripuls}(t, \text{width}, \text{skew})$

% sinc 函数:  $\text{sinc}(x) = \sin(\text{pix})/\text{pix}$   
 %使用  $\text{sinc}(x)$ 命令产生抽样函数信号  $Sa(x)$

```
t = -10:1/500:10;
x = sinc(t);
plot(t,x);
hold on;
x = sinc(t/pi);
plot(t,x,'g');
axis([-12,12,-0.4,1.2]);
ylabel('x(t)');
xlabel('Time(s)');
title('sample function');
```

程序运行结果如图 7.4 所示。

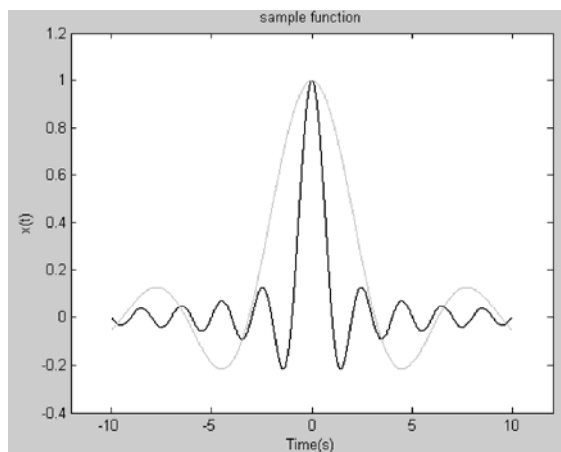


图 7.4 抽样函数信号波形图

```
%使用 rectpuls 命令产生高度为 1、宽度为 3、延时为 2 s 的矩形脉冲信号
t=-2:.02:6;
plot(t,rectpuls(t-2,3));
axis([-2,6,0,1.5]);
ylabel('x(t)');
xlabel('Time(s)');
title('rectangular pulse');
```

程序运行结果如图 7.5 所示。

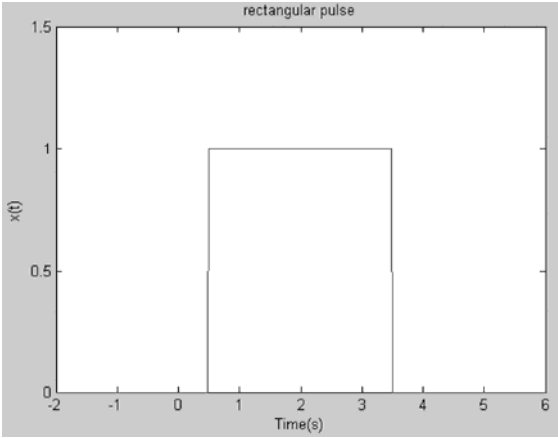


图 7.5 矩形脉冲信号波形图

```
% 使用 tripuls 命令产生三角波脉冲信号
t=-3:0.001:3;
ft=tripuls(t,4,0.5);
plot(t,ft)
ft=tripuls(t,4,1);
```

程序运行结果如图 7.6 所示。

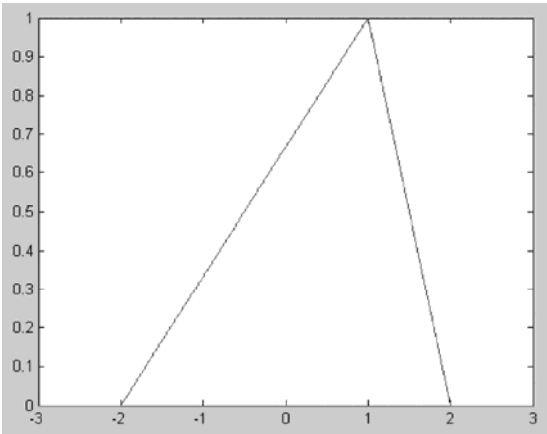


图 7.6 三角波脉冲信号波形图



%生成单位脉冲序列  $d(n-3)$

```
n=-2:30;
```

```
x=[zeros(1,5),1,zeros(1,27)];
```

```
subplot(2,1,1);
```

```
stem(n,x);
```

%生成单位阶跃序列  $u(n-3)$

```
y=[zeros(1,5),ones(1,28)];
```

```
subplot(2,1,2);
```

```
stem(n,y);
```

程序运行结果如图 7.7 所示。

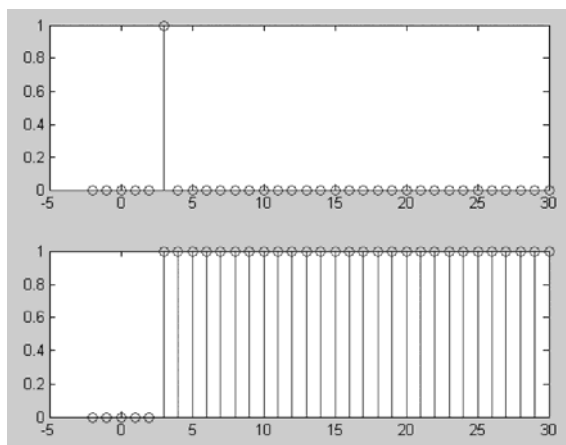


图 7.7 单位脉冲序列和单位阶跃序列波形图

## 7.2.2 信号基本运算的MATLAB实现

### 1. 信号的尺度变换、翻转、时移(平移)

例如, 已知三角波  $f(t)$  如图 7.8 所示, 用 MATLAB 画出  $f(2t)$  和  $f(2-2t)$  的波形。

MATLAB 程序如下:

```
ft1=tripuls(2*t,4,0.5);
```

```
subplot(2,1,1)
```

```
plot(t,ft1)
```

```
title('f(2t)')
```

```
ft2=tripuls((2-2*t),4,0.5);
```

```
t=-3:0.001:3;
```

```
subplot(2,1,2)
```

```
plot(t,ft2)
```

```
title('f(2-2t)')
```

程序运行结果如图 7.9 所示。

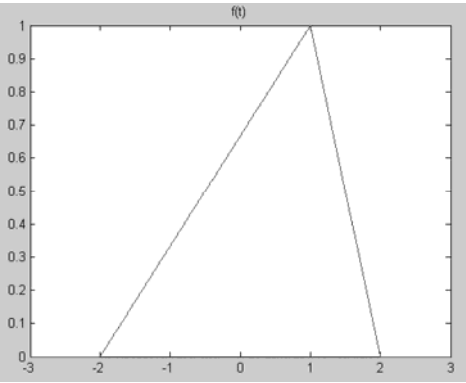


图 7.8  $f(t)$ 的波形图

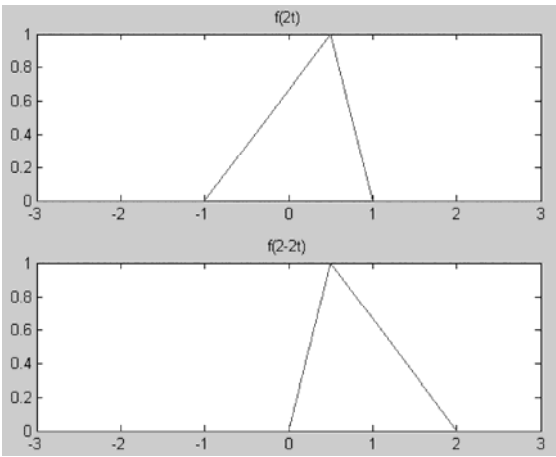


图 7.9  $f(2t)$ 和 $f(2-2t)$ 的波形图

2. 信号的相加与相乘

相加用算术运算符 “+” 实现；相乘用数组运算符 “.\*” 实现。

%画信号  $Ae^{at}\cos(\omega_0t + \phi)$ 的波形

```
t=0:0.001:8;
A=1;
a=-0.4;
w0=2*pi;
phi=0;
ft1=A*exp(a*t).*sin(w0*t+phi);
plot(t,ft1)
```

程序运行结果如图 7.10 所示。

3. 离散序列的差分与求和以及连续信号的微分与积分

- 差分  $y = \text{diff}(f);$
- 求和  $y = \text{sum}(f(k1:k2));$
- 微分  $y = \text{diff}(f)/h;$

其中,  $h$  为数值计算所取时间间隔。

定积分 `quad('function_name',a,b);`

其中, `function_name` 为被积函数名, `a` 和 `b` 指定积分区间。

例如, 画出如图 7.11 所示三角波信号的一阶导数和积分的波形图。

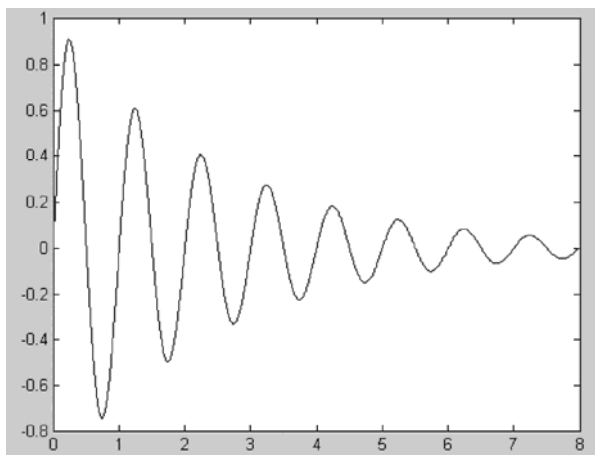


图 7.10 信号相加相乘波形图

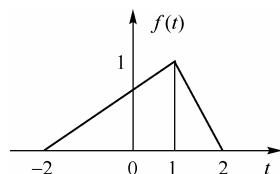


图 7.11 三角波  $f(t)$

用 MATLAB 的数值计算方法的程序如下:

% 画微分和积分的程序(数值计算)

```
t0=-3;t1=3;dt=0.01;
```

```
t=t0:dt:t1;
```

```
f1=tripuls(t,4,0.5);
```

% 定义三角波

```
max_f=max(f1);min_f=min(f1);
```

```
df=diff(f1)/dt;
```

% 求导

```
max_df=max(df);min_df=min(df);
```

```
f=inline('tripuls(t,4,0.5)');
```

% 定义在线函数对象

```
for x=1:length(t)
```

```
    intf(x)=quad(f,-3,t(x));
```

% 求积分

```
end
```

```
max_if=max(intf);min_if=min(intf);
```

```
subplot(3,1,1),plot(t,f1,'linewidth',2);
```

% 画  $f(t)$

```
grid;line([t0 t1],[0 0]);ylabel('f(t)')
```

```
axis([t0,t1,min_f-0.2,max_f+0.2])
```

```
subplot(3,1,2),plot(t(1:length(t)-1),df,'linewidth',2);
```

```
grid;line([t0 t1],[0 0]);ylabel('df(t)/dt')
```

% 画  $f(t)$  的导数

```
axis([t0,t1,min_df-0.2,max_df+0.2])
```

```
subplot(3,1,3),plot(t,intf,'linewidth',2);
```

% 画  $f(t)$  的积分

```
grid;line([t0 t1],[0 0]);ylabel('f(t)的积分')
```

```
axis([t0,t1,min_if-0.2,max_if + 0.2])
xlabel('t'),
```

程序运行结果如图 7.12 所示。

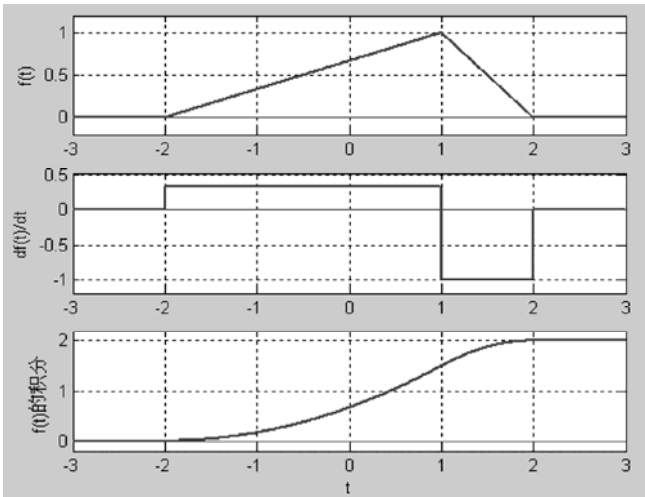


图 7.12 三角波信号  $f(t)$  及其对应的微分积分图

### 7.3 利用MATLAB进行系统的时域分析

本节的主要内容包括：

- 1. 连续时间系统零状态响应的求解；
- 2. 连续时间系统冲激响应和阶跃响应的求解；
- 3. 离散时间系统零状态响应的求解；
- 4. 离散时间系统单位脉冲响应的求解；
- 5. 离散卷积的计算。

#### 1. 连续时间系统零状态响应的求解

线性时不变 (LTI) 连续时间系统用常系数线性微分方程进行描述，系统的零状态响应就是在系统初始状态为零的条件下微分方程的解。MATLAB 控制系统工具箱提供了一个 `lsim` 函数来求解连续时间系统的零状态响应。设系统方程为

$$a_3y^{(3)}(t) + a_2y^{(2)}(t) + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = b_3f^{(3)}(t) + b_2f^{(2)}(t) + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t)$$

该方程左边、右边的系数向量分别为  $a = [a_3, a_2, a_1, a_0]$ ， $b = [b_3, b_2, b_1, b_0]$ ，所对应的系统模型 `sys` 可借助 MATLAB 中的 `tf` 函数得到

$$\text{sys} = \text{tf}(b, a)$$

这样，系统的零状态响应为

$$y = \text{lsim}(\text{sys}, f, t)$$

其中， $f$  是输入信号向量； $t$  是与  $f$  对应的时间变量。

## 2. 连续时间系统冲激响应和阶跃响应的求解

连续时间系统冲激响应可用 `impulse` 函数直接求出，其调用形式为

$$y = \text{impulse}(\text{sys}, t)$$

连续时间系统阶跃响应可用 `step` 函数直接求出，其调用形式为

$$y = \text{step}(\text{sys}, t)$$

其中， $t$  表示计算系统响应的抽样点向量；`sys` 是 LTI 系统模型。

## 3. 离散时间系统 $\sum_{i=0}^n a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^m b_j f[k-j]$ 零状态响应的求解

$$y = \text{filter}(b, a, f)$$

其中， $b, a$  分别是差分方程左、右端的系数向量； $f$  表示输入序列； $y$  表示输出序列。

## 4. 离散时间系统单位脉冲响应的求解

$$h = \text{impz}(b, a, k)$$

其中， $b, a$  分别是差分方程左、右端的系数向量； $k$  表示输出序列的取值范围； $h$  是单位脉冲响应。

## 5. 离散卷积的计算

$$c = \text{conv}(a, b)$$

其中， $a, b$  为待卷积两序列的向量表示； $c$  是卷积结果。

`conv` 函数也可用于计算两个多项式的积。

例如， $(s^3 + 2s + 3)(s^2 + 3s + 2)$  可用下面 MATLAB 语句求出。

```
a = [1,0,2,3];
```

```
b = [1,3,2]
```

```
c = conv(a,b)
```

**例 7.1** 求系统  $y''(t) + 2y'(t) + 100y(t) = 10f(t)$  的零状态响应，已知  $f(t) = (\sin 2t)u(t)$ 。

**解** MATLAB 程序如下：

```
%微分方程求解
```

```
ts = 0;
```

```
te = 5;
```

```
dt = 0.01;
```

```
sys = tf([1],[1 2 100]);
```

```
t = ts:dt:te;
```

```
f = 10*sin(2*pi*t);
```

```
y = lsim(sys,f,t);
```

```
plot(t,y);
```

```
xlabel('Time(sec)')
```

```
ylabel('y(t)')
```

程序运行结果如图 7.13 所示。

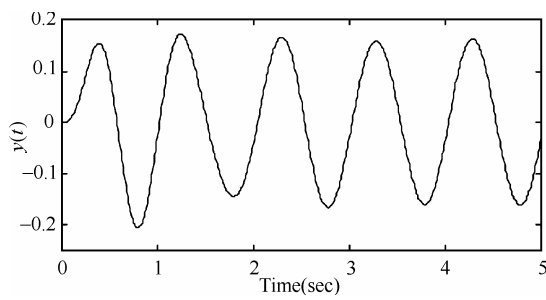


图 7.13  $f(t)=(\sin 2 t) u(t)$  的零状态响应

**例 7.2** 求系统  $y''(t)+2y'(t)+100y(t)=10f(t)$  的零状态响应，已知  $f(t)=\delta(t)$ 。

**解** MATLAB 程序如下：

%连续时间系统的冲激响应

```
ts=0;te=5;dt=0.01;
sys=tf([10],[1 2 100]);
t=ts:dt:te;
y=impz(sys,t);
plot(t,y);
xlabel('Time(sec)')
ylabel('h(t)')
```

程序运行结果如图 7.14 所示。

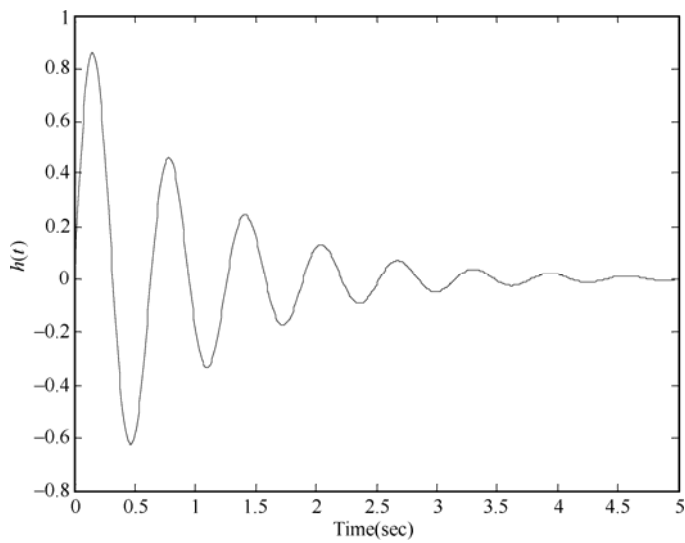


图 7.14  $f(t)=\delta(t)$  的零状态响应

**例 7.3** 分析噪声干扰的信号  $f[k]=s[k]+d[k]$  通过  $M$  点滑动平均系统  $y[k]=\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f[k-i]$  的响应，其中， $s[k]=(2k) \cdot 0.9^k$  是原始信号， $d[k]$  是噪声。

解 MATLAB 程序如下:

```
R=51; d=rand(1,R)-0.5;
k=0:R-1;
s=2*k.*(0.9.^k); f=s+d;
figure(1);
plot(k,d,'r-.',k,s,'b--',k,f,'g-');
M=5; b=ones(M,1)/M; a=1;
y=filter(b,a,f);
figure(2);
plot(k,s,'b--',k,y,'r-');
```

噪声干扰信号  $f[k]$  及其通过  $M$  点滑动平均系统的响应分别如图 7.15 和图 7.16 所示。

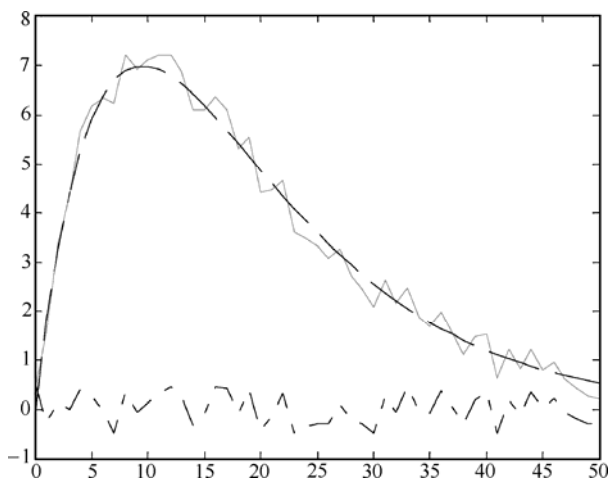


图 7.15 噪声干扰信号  $f[k]$

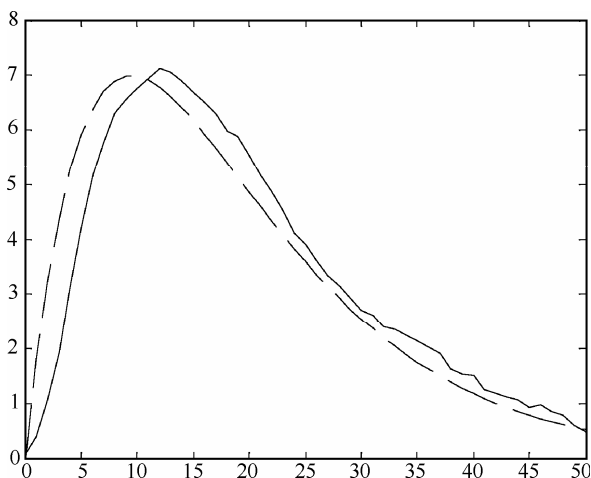


图 7.16  $f[k]$  通过  $M$  点滑动平均系统的响应

**例 7.4** 求系统  $y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=10f[k]$  的单位脉冲响应。

解 MATLAB 程序如下:

```
%离散系统的单位脉冲响应
k=0:10; a=[1 3 2]; b=[1];
h=impz(b,a,k);
stem(k,h)
```

程序运行结果如图 7.17 所示。

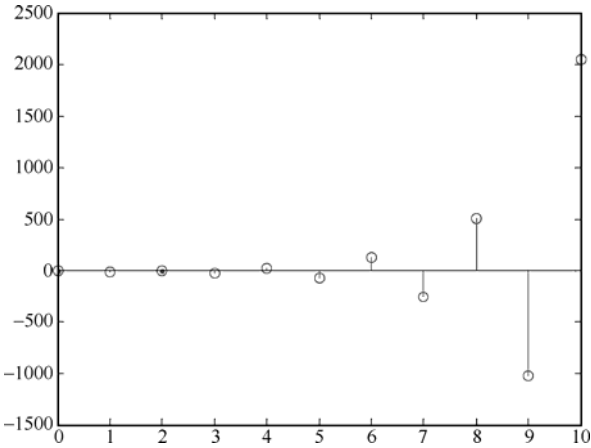


图 7.17 离散系统的单位脉冲响应

**例 7.5** 计算  $x[k]*y[k]$  并画出卷积结果，已知  $x[k]=\{1, 2, 3, 4; k=0, 1, 2, 3\}$ ， $y[k]=\{1, 1, 1, 1; k=0, 1, 2, 3, 4\}$ 。

**解** MATLAB 程序如下：

```
%计算  $x[k]*y[k]$  并画出卷积结果
x=[1, 2, 3, 4]; y=[1, 1, 1, 1, 1];
z=conv(x,y);
N=length(z);
stem(0:N-1,z);
```

程序运行结果如图 7.18 所示。

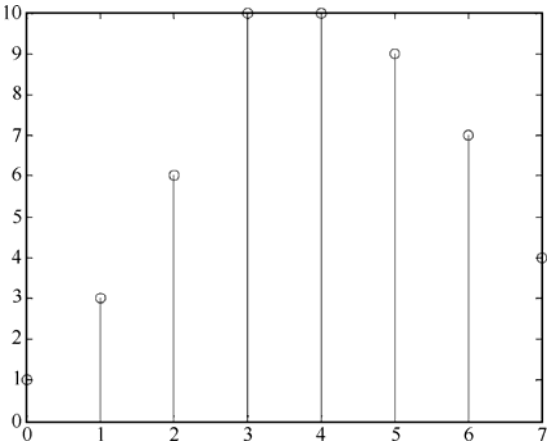


图 7.18  $x[k]*y[k]$  的运算结果



## 7.4 利用MATLAB进行信号的频域分析

本节的主要内容包括：

1. 周期信号频谱的 MATLAB 实现；
2. 利用 FFT 和 IFFT 分析与合成离散非周期信号。

### 7.4.1 周期信号频谱的MATLAB实现

频谱  $C_n$  一般为复数，可以分别利用 `abs` 和 `angle` 函数获得其幅频特性和相频特性。其调用格式分别为

$$x = \text{abs}(C_n)$$

$$y = \text{angle}(C_n)$$

周期信号的频谱  $C_n$  为离散信号，可以用 `stem` 画出其频谱图。

**例 7.6** 试用 MATLAB 画出图 7.19 所示的周期三角波信号的频谱。

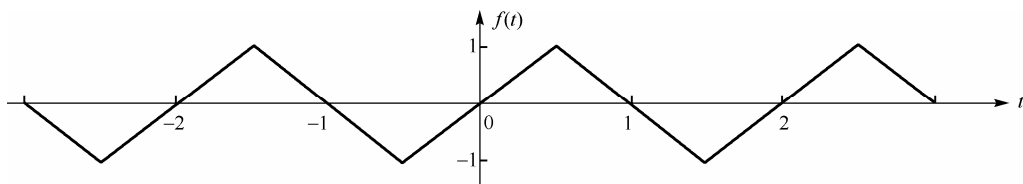


图 7.19 周期三角波信号

**解** 周期信号的频谱为

$$C_n = \begin{cases} \frac{-4j}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

画出三角波信号频谱的 MATLAB 程序：

```
N=8; n1=-N: -1; %计算 n=-N 到-1 的 Fourier 系数
c1=-4*j*sin(n1*pi/2)/pi^2./n1.^2; c0=0; %计算 n=0 时的 Fourier 系数
n2=1:N; %计算 n=1 到 N 的 Fourier 系数
c2=-4*j*sin(n2*pi/2)/pi^2./n2.^2;
cn=[c1 c0 c2]; n=-N:N;
subplot(2,1,1);
stem(n,abs(cn));
ylabel('Cn 的幅度');
subplot(2,1,2);
stem(n,angle(cn));
ylabel('Cn 的相位');
xlabel('\omega/\omega_0');
```

程序运行结果如图 7.20 所示。

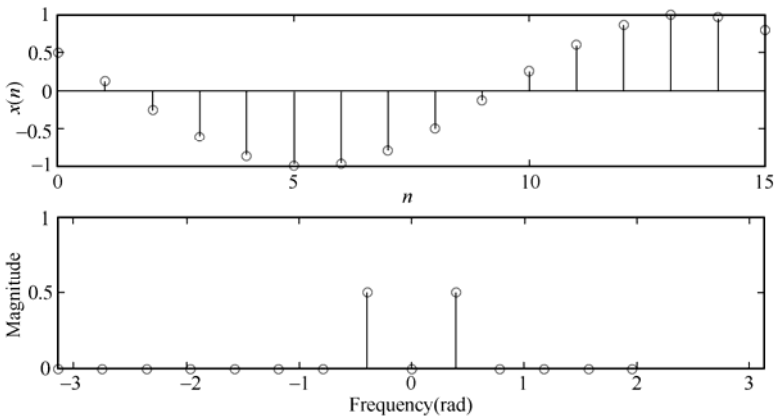


图 7.20 周期三角波信号的幅频特性和相频特性

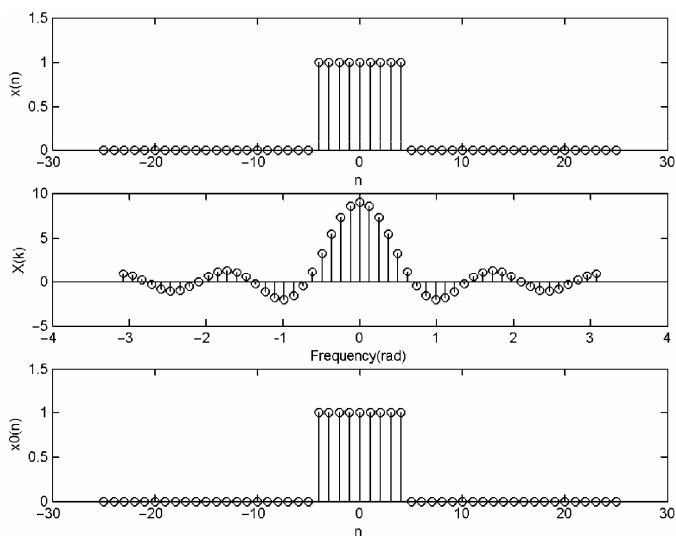
### 7.4.2 利用FFT和IFFT分析与合成离散非周期信号

**例 7.7** 已知一个有限长脉冲序列  $x(n) = 1(-4 < n < 4)$ ，用 FFT 计算其频谱。

**解** MATLAB 程序如下：

```
M=4;
N=51;
n=-(N-1)/2:(N-1)/2;
x=[ones(1,M+1),zeros(1,N-2*M-1),ones(1,M)];
subplot(3,1,1);
stem(n,fftshift(x));
axis([-30,30,0,1.5]);
xlabel('n');
ylabel('x(n)');
x=fft(x,N);
omega=2*pi/N*n;
subplot(3,1,2);
stem(omega,real(fftshift(x)));
xlabel('Frequency(rad)'); ylabel('X(k)');
x0=ifft(x,N);
subplot(3,1,3);
stem(n,real(fftshift(x0)));
axis([-30,30,0,1.5]);
ylabel('x0(n)'); xlabel('n');
```

程序运行结果如图 7.21 所示。

图 7.21 有限长脉冲序列  $x(n)$  波形图、频谱图和合成后的波形图

## 7.5 利用MATLAB进行系统频域分析

本节的主要内容包括：

1. 连续系统频率响应特性的计算；
2. 周期信号通过系统的响应；
3. 离散系统频率响应特性的计算。

### 7.5.1 连续系统频率响应特性的计算

系统的频率响应函数为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中， $|H(j\omega)|$  为系统的幅频特性，反映了输出与输入信号幅度之比随输入信号角频率  $\omega$  变化的规律； $\varphi(\omega)$  为系统的相频特性，体现了输出与输入信号的相位差随输入信号角频率  $\omega$  变化的规律。

系统的频率响应函数是一个非常重要的参数，MATLAB 工具箱中提供了专门用于分析连续系统频率响应的 `freqs()` 函数。利用 `freqs()` 函数可以求出系统频率响应的数值解，也可以绘出其幅频特性曲线和相频特性曲线。

$$H = \text{freqs}(b, a, \omega)$$

其中， $b$  为系统函数的有理多项式中分子多项式的系数向量； $a$  为分母多项式的系数向量； $\omega$  为需计算的频率抽样点向量，单位为 rad/s。

**例7.8** 三阶归一化的 Butterworth 低通滤波器的系统函数为  $H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1}$ ，试画出  $|H(\omega)|$  和  $\angle H(\omega)$ 。

解 MATLAB 程序如下：

```
w = linspace(0,5,200);  
b = [1];a = [1 2 2 1];  
h = freqs(b,a,w);           % 获取频率响应数据  
subplot(2,1,1);  
plot(w,abs(h));              % 绘制幅频特性曲线  
subplot(2,1,2);  
plot(w,angle(h));            % 绘制相频特性曲线
```

程序运行结果如图 7.22。

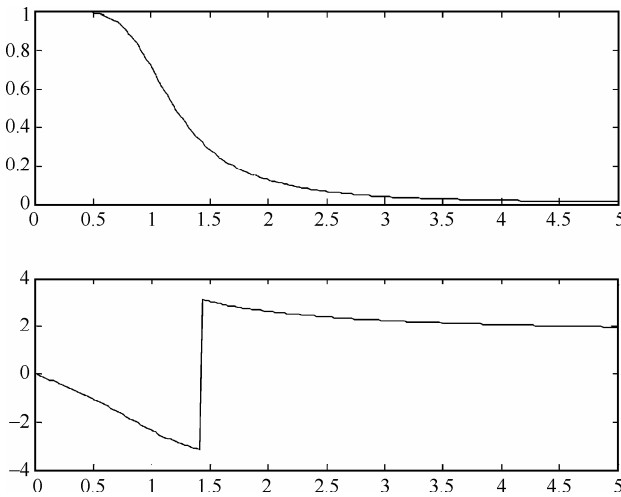


图 7.22 三阶 Butterworth 低通滤波器的幅度响应和相位响应

7.5.2 周期信号通过系统的响应

例 7.9 用 MATLAB 程序实现如图 7.23 所示周期方波通过 RC 系统的响应。

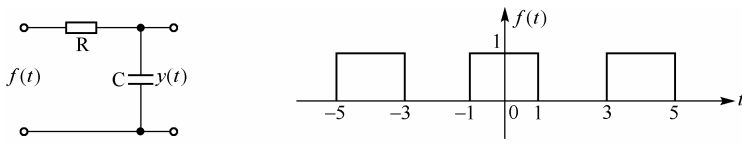


图 7.23 RC 系统及周期方波

解

$$H(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}, \quad c_n = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) = 0.5\text{Sa}(0.5\pi n)$$
$$y(t) = 0.5 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}(0.5\pi n) \text{Re}\left\{ \frac{e^{jn\omega_0 t}}{1 + jnRC\omega_0} \right\}$$
$$\left| \frac{1}{1 + jnRC\omega_0} \right| \cos(n\omega_0 t + \phi)$$

画出周期方波通过 RC 系统响应的 MATLAB 程序:

```
% Periodic signal pass LTI system
T=4;w0=2*pi/T;RC=0.1;
t=-6:0.01:6;N=51; c0=0.5;
xN=c0*ones(1,length(t)); %dc
for n=1:2:N    % even harmonics are zero
    H=abs(1/(1+j*RC*w0*n));
    phi=angle(1/(1+j*RC*w0*n));
    xN=xN+H*cos(w0*n*t+phi)*sinc(n*0.5);
end
plot(t,xN);
xlabel(['time RC = ',num2str(RC)]);
grid;
set(gca,'xtick',[-5 -3 -1 0 1 3 5]);
```

程序运行结果如图 7.24 所示。

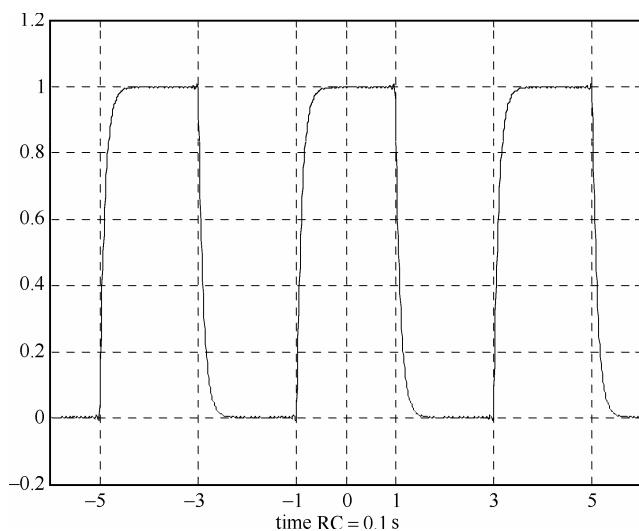


图 7.24 周期方波通过 RC 系统的响应

### 7.5.3 离散系统频率响应特性的计算

计算离散系统频率响应  $F(e^{j\Omega}) = \frac{B(e^{j\Omega})}{A(e^{j\Omega})} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \dots + b_M e^{-j\Omega M}}{a_0 + a_1 e^{-j\Omega} + \dots + a_N e^{-j\Omega N}}$  的 MATLAB 函数为

$$h = \text{freqz}(b, a, \omega)$$

式中,  $b$  为分子多项式的系数;  $a$  为分母多项式的系数;  $w$  为抽样的频率点(至少 2 点),  $\omega$  在  $0 \sim 2\pi$  之间。

例 7.10 用 MATLAB 程序画出  $F(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$  的幅频特性曲线。

解 MATLAB 程序如下：

```
b=[1];a1=[1 -0.9];a2=[1 0.9]
w=linspace(0,2*pi,512);
h1=freqz(b,a1,w);
h2=freqz(b,a2,w);
plot(w/pi,abs(h1),w/pi,abs(h2),'-');
legend('\alpha = 0.9','\alpha = -0.9');
```

程序运行结果如图 7.25 所示。

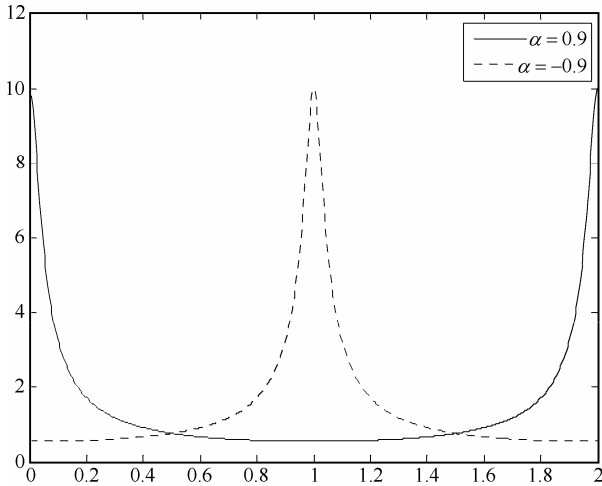


图 7.25  $F(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$  的幅频曲线

## 7.6 利用MATLAB进行连续系统的s域分析

本节的主要内容包括：

- 1. 部分分式展开的 MATLAB 实现；
- 2.  $H(s)$ 的零极点与系统特性的 MATLAB 计算。

### 7.6.1 部分分式展开的MATLAB实现

MATLAB 有一个命令用于求  $B(s)/A(s)$  的部分分式展开式。设  $s$  的有理分式为

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

命令

$$[r,p,k]=residue(num,den)$$

式中，num 和 den 分别为  $F(s)$ 的分子多项式和分母多项式的系数向量。

MATLAB 将按下式给出  $F(s)$ 部分分式展开式中的留数、极点和余项：

$$F(s) = \frac{r(1)}{s - p(1)} + \frac{r(2)}{s - p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s - p(n)} + k(s)$$

式中， $r$  为部分分式的系数； $p$  为极点； $k$  为多项式的系数。若为真分式，则  $k$  为零。

## 7.6.2 $H(s)$ 的零、极点与系统特性的MATLAB计算

传递函数  $H(s)$  输入之后, 分别对分子和分母多项式进行因式分解, 则可以求出系统的零、极点, MATLAB 提供了多项式求根函数 `roots()`, 其调用格式为

$$r = \text{roots}(N)$$

式中,  $N$  为多项式。

传递函数在复平面上的零极点图可以采用 `pzmap()` 函数来完成, 在零极点图上, 零点用“。”表示, 极点用“×”表示。其调用格式为

$$\text{pzmap}(\text{sys})$$

式中, 程序的结果表示 `sys` 所描述系统的零极点图。

**例 7.11** 用部分分式展开法求  $F(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+3}$  的逆变换。

**解** MATLAB 程序如下:

%将结果数据以分数的形式输出

```
num=[1 2];
```

```
den=[1 4 3 0];
```

```
[r,p]=residue(num,den)
```

运行结果为

```
r = -1/6, -1/2, 2/3  p = -3, -1, 0
```

故  $F(s)$  可展开为

$$F(s) = \frac{2/3}{s} - \frac{0.5}{s+1} - \frac{1/6}{s+3}$$

可得

$$f(t) = \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-3t}u(t)$$

**例 7.12** 用部分分式展开法求  $F(s) = \frac{2s^2+3s+5}{(s+1)(s^2+s+2)}$  的逆变换。

**解** MATLAB 程序如下:

```
num=[2 3 0 5];
```

```
den=conv([1 1],[1 1 2]);
```

%将因子相乘的形式转换成多项式的形式

```
[r,p,k]=residue(num,den)
```

```
magr=abs(r) %求 r 的模
```

```
angr=angle(r) %求 r 的相角
```

运行结果为

```
r = -2.0000 + 1.1339i, -2.0000 - 1.1339i, 3.0000
```

```
p = -0.5000 + 1.3229i, -0.5000 - 1.3229i, -1.0000
```

```
k = 2
```

```
magr = 2.299, 2.2991, 3.0000
```

```
angr = 2.6258, -2.6258, 0
```

故  $F(s)$  可展开为

$$F(s) = 2 + \frac{3}{s+1} - \frac{2.2991e^{-j2.6258}}{s+0.5+j1.3229} + \frac{2.2991e^{-j2.6258}}{s+0.5-j1.3229}$$

可得

$$f(t) = 2\delta(t) + 3e^{-t}u(t) + 1.1495e^{-0.5t} \cos(1.3229t + 2.6258)u(t)$$

**例 7.13** 试画出系统  $F(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$  的零极点分布图, 求其单位冲激响应  $h(t)$  和频率响应  $H(j\omega)$ , 并判断系统是否稳定?

**解** MATLAB 程序如下:

```
num=[1];den=[1 2 2 1];
sys=tf(num,den);
poles=roots(den);
subplot(3,1,1);pzmap(sys);
t=0:0.02:10;
h=impz(num,den,t); subplot(3,1,2);
plot(t,h)
title('Impulse Response')
[H,w]=freqs(num,den); subplot(3,1,3);
plot(w,abs(H))
xlabel('\omega')
title('Magnitude Response')
```

程序运行结果如图 7.26 所示。

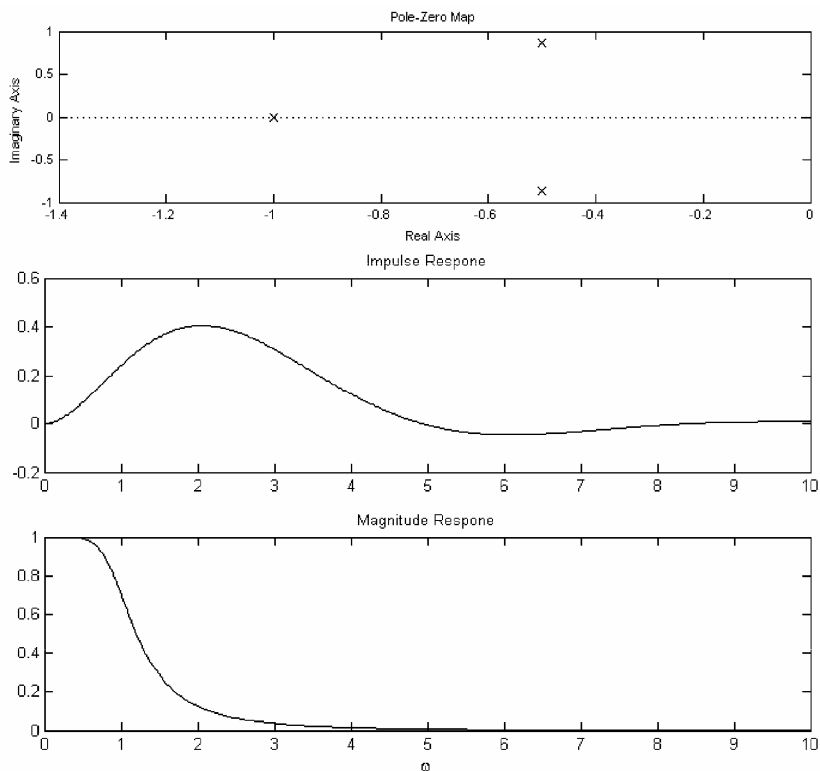


图 7.26 系统  $F(s)$  的零极点分布图、 $h(t)$  和  $H(j\omega)$



## 7.7 利用MATLAB进行离散系统的 $z$ 域分析

本节的主要内容包括:

1. 部分分式展开的 MATLAB 实现;
2.  $H(z)$ 的零、极点与系统特性的 MATLAB 计算。

### 7.7.1 部分分式展开的MATLAB实现

$$[r, p, k] = \text{residuez}(\text{num}, \text{den})$$

式中, num, den 分别为  $F(z)$ 分子多项式和分母多项式的系数向量;  $r$  为部分分式的系数;  $p$  为极点;  $k$  为多项式的系数。若为真分式, 则  $k$  为零。

### 7.7.2 $H(z)$ 的零、极点与系统特性的MATLAB计算

利用 tf2zp 函数可以计算  $H(z)$ 的零、极点, 其调用形式为

$$[z, p, k] = \text{tf2zp}(b, a)$$

式中,  $z$  为零点;  $p$  为极点;  $k$  为增益常数。

$H(z)$ 的零极点分布图可用 zplane 函数画出, 其调用形式为

$$\text{zplane}(b, a)$$

式中,  $b$  和  $a$  分别为  $H(z)$ 分子多项式和分母多项式的系数向量。

**例 7.14** 将  $F(z) = \frac{18}{-z^{-3} - 4z^{-2} + 3z^{-1} + 18}$  用部分分式展开。

**解** MATLAB 程序如下:

```
num = [18]; den = [18 3 -4 -1];
```

```
[r,p,k] = residuez(num,den)
```

运行结果为

```
r = 0.3600, 0.2400, 0.4000
```

```
p = 0.5000, -0.3333, -0.3333
```

```
k = []
```

故  $F(z)$ 可展开为

$$F(z) = \frac{0.36}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{0.24}{1 + 0.3333z^{-1}} + \frac{0.4}{(1 + 0.3333z^{-1})^2}$$

**例 7.15** 试画出系统  $H(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 0.5z^{-1} - 0.005z^{-2} + 0.3z^{-3}}$  的零极点分布图, 求其单位冲激响应  $h[k]$ 和频率响应  $H(e^{j\omega})$ 。

**解** MATLAB 程序如下:

```
b = [1 2 1];
a = [1 -0.5 -0.005 0.3];
figure(1);
zplane(b,a);
num=[0 1 2 1];
den = [1 -0.5 -0.005 0.3];
h = impz(num,den);
figure(2);stem(h)
xlabel('k')
title('Impulse Response')
[H,w] = freqz(num,den);
figure(3);plot(w/pi,abs(H))
xlabel('Frequency \omega')
title('Magnitude Response')
```

程序运行结果如图 7.27、图 7.28 和图 7.29 所示。

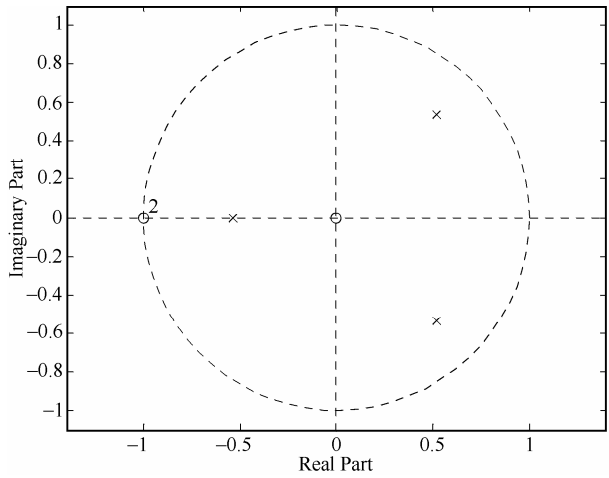


图 7.27 零极点分布图

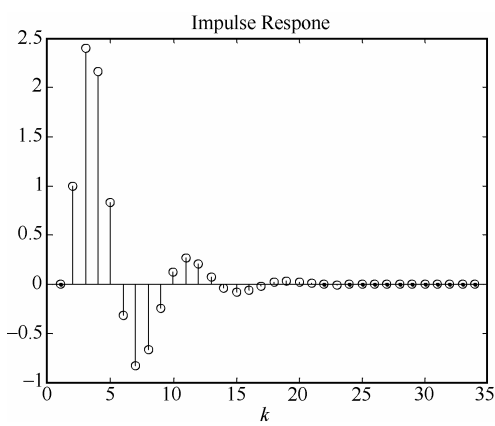


图 7.28 单位冲激响应  $h[k]$

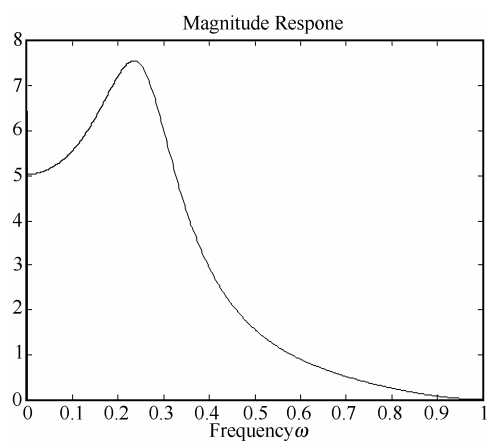


图 7.29 频率响应  $H(e^{j\omega})$

## 参 考 文 献

- [1] Simon Haykin, Barry Van Veen. Signals and Systems [M]. 2nd ed. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [2] B.P. Lathi. Signals Processing & Linear Systems[M]. Oxford University Press, 1998.
- [3] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky. Signals & Systems[M]. 2nd ed. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [4] Bernd Girod, Rudolf Rabenstein, Alexander Stenger, Signals and Systems[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [5] Edward A. Lee, Pravin Varaiya. 信号与系统结构精析[M]. 吴利民, 译, 北京: 电子工业出版社, 2006.
- [6] 乐正友. 信号与系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004
- [7] 郑君理. 信号与系统(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [8] 吴大正. 信号与线性系统分析(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [9] 乐正友. 信号与系统例题分析及习题[M]. 清华大学出版社, 1985.
- [10] 范世贵. 信号与系统常见题型解析及模拟题[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1999.
- [11] 陈后金. 信号与系统(第2版) [M]. 北京: 北京交通大学出版社, 2005.
- [12] 谷源涛. 信号与系统——MATLAB 综合实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.